

Reduktionssysteme zur Berechnung einer Auflösung
der orthogonalen freien Quantengruppen $\mathcal{A}_o(n)$

Johannes Härtel
jhaertel@math.uni-goettingen.de

5. Mai 2008

Vorwort

Schon Mitte der sechziger Jahre des 20. Jahrhunderts hatte Kac [Kac63] eine neue Klasse („Ringgruppen“) von mathematischen Objekten zur Analyse der Pontryagin-dualität eingeführt, die später unter dem Begriff „Quantengruppen“ klassifiziert wurde.

Etwa zwanzig Jahre später beschäftigte sich Woronowicz [Wor87] [Wor88] mit „Pseudogruppen“, als er eine wichtige Familie von Matrixquantengruppen einführte. Sie lieferte neuartige Deformationen der zuvor noch als rigide eingestuften Liegruppe $SU(2)$. Diese Quanten- $SU(2)$ -Gruppen lieferten wichtige Beispiele für die Quantenphysik, in der $SU(2)$ beispielsweise als Isospingruppe in der schwachen Wechselwirkung auftritt.

Woronowicz erklärte dabei die Quanten- $SU(2)$ -Gruppen über die Charaktere einer axiomatisch vorgegebenen Hopfalgebra. Entsprechend stellen die Quanten- $SU(2)$ -Gruppen Beispiele für Räume in der nicht-kommutativen Geometrie von Connes [Con85] dar. Diese Konstruktionen entsprechen denen von Drinfeld [Dri86] und Jimbo [Jim85] (vgl. [Ros87]).

Später, im Jahr 1995, definierten Wang [Wan95] und Van Daele [VDW96] die orthogonalen und die unitären freien Quantengruppen. Diese stellten sich als universell heraus, in dem Sinn, dass jede kompakte Matrixquantengruppe isomorph ist zu einem direkten Produkt von Unterhalbgruppen der freien Quantengruppe. Dieses Paper zeichnet sich durch einen sehr konkreten, direkten Zugang zu Quantengruppen aus. Meine Arbeit bezieht sich auf Wangs Beschreibung von freien Quantengruppen.

Entsprechend der Universalität von Wang und Van Daeles Konstruktion ist die Homologie der beiden freien Quantengruppen von besonderem Interesse. Unter der Voraussetzung, dass eine bestimmte Sequenz exakt ist, haben Collins und Thom in [TC06] Schlüsse über die Homologien der orthogonalen und der unitären freien Quantengruppen gezogen, mit dem Ziel, ihre ℓ^2 -Bettizahlen zu bestimmen. Eine Übersicht zu orthogonalen Quantengruppen findet sich bei Collins und Banica [BC07a].

Das wesentliche Problem, auf das Collins und Thom in ihrer Arbeit stoßen, ist, dass sie zwar explizit Erzeuger und Relationen der freien Quantengruppe, jedoch keine Basis kennen. In dieser Arbeit wird der Formalismus von Reduktionssystemen genutzt, um exemplarisch eine solche Basis zu berechnen und die Exaktheit von Collins und Thoms projektiver Auflösung zu beweisen.

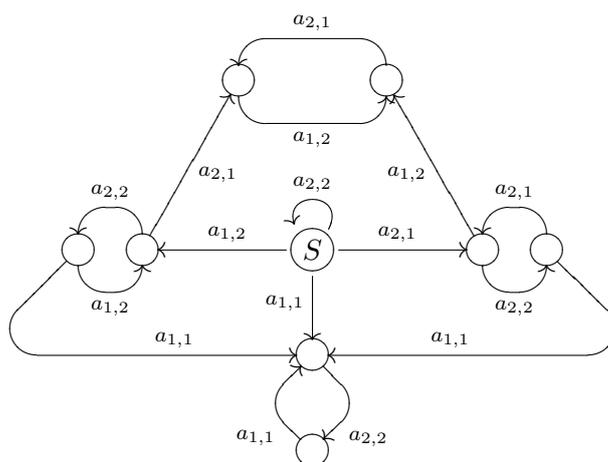
Reduktionssysteme (synonym Gröbnerbasen oder Standardbasen) wurden 1964 und 1965 von Buchberger [Buc06], Hironaka [Hir64] sowie Knuth und Bendix [KB70] unabhängig voneinander beschrieben. 1978 zeigte Bergman [Ber78a], dass auch Gröbnerbasen bezüglich Moduln berechnet werden können.

Reduktionssysteme entwickelten sich zu einem wichtigen Werkzeug in der theore-

tischen Informatik, für Theorembeweise und funktionale Programmierung. Es gibt inzwischen sehr gute Software zur Berechnung von Reduktionssysteme im Kontext kommutativer Algebren (z.B. SINGULAR [GPS05]), und auch in der Literatur werden vornehmlich kommutative Algebren behandelt. Auch für nicht-kommutative Algebren gibt es Software (z.B. PLURAL [GLS03], MAGMA [BCP97], GAP [GAP06]), allerdings beschränkt diese sich auf Spezialfälle. Zur Berechnung werden Vervollständigungsverfahren (siehe [Buc76] und [KB70]) benutzt. Die mir bekannten Implementierungen reduzieren in jedem Schritt alle bekannten Regeln vollständig und nutzen Symmetrien nicht aus, daher terminieren sie für die freien Quantengruppen nur für $n < 10$.

In Kapitel 1 trage ich die Ergebnisse für nicht-kommutative Algebren zusammen und formuliere sie direkt unter Verwendung des Diamantenlemmas. Insbesondere wird gezeigt, dass sich die Verifizierung eines Reduktionssystem für den Kern eines Modulhomomorphismen vereinfachen lässt, falls für eine Algebra ein Reduktionssystem bekannt ist.

Im zweiten Kapitel wird ein vollständiges Reduktionssystem bezüglich der freien orthogonalen Quantengruppen an und verifiziere es. Für den Fall $n = 2$ sind es nur sehr wenige Regeln und es kann ein endlicher Automat angegeben werden, der sämtliche Basiselemente darstellt:



In Kapitel 3 werden die Ergebnisse aus Kapitel 1 und 2 genutzt, um eine Basis für die Kerne einer freien Auflösung der freien Quantengruppe als Bimodul zu beweisen. Insbesondere im Fall von Collins und Thoms Sequenz liefert diese Methode die korrekten Kerne.

Abschließend wird im letzten Kapitel mit der nun verifizierten Auflösung die Homologie der orthogonalen freien Quantengruppen explizit berechnet.

Bedanken möchte ich mich beim Graduiertenkolleg „Gruppen und Geometrie“ für die finanzielle Unterstützung meiner Promotion. Anselm Knebusch danke ich für seine Bereitschaft, bei meinen Rechnungen Hilfestellung zu leisten. Besonders möchte ich mich bei Andreas Lochmann für seine Unterstützung mit seinem Wissen zu Ordnungen bedanken. Ivan Yudin schulde ich tiefen Dank für seinen Beistand während des gesamten Zeitraumes und seine hilfreichen Ratschläge.

Inhaltsverzeichnis

1	Reduktionssysteme	9
1.1	Abstrakte Reduktionssysteme	10
1.1.1	Definitionen	10
1.1.2	Konfluenz	11
1.1.3	Diamantenlemma	15
1.2	Reduktionssystem bezüglich einer Algebra	18
1.2.1	Definitionen	18
1.2.2	Konfluenz	22
1.2.3	Überschneidungen	23
1.2.4	Ordnungen	27
1.2.5	Konstruktion von r	32
1.2.6	Noethersch	33
1.3	Reduktionssystem bezüglich eines Moduls	34
1.3.1	\mathcal{P} -Vollständigkeit	35
1.3.2	$A \otimes A^{op}$ -Moduln	38
1.3.3	Kern eines $A \otimes A^{op}$ -Homomorphismus	43
2	Konvergentes Reduktionssystem für $\mathcal{A}(n)$	51
2.1	Definition $\mathcal{A}(n)$	52
2.2	Behebung der minimalen Überschneidungen	54
2.2.1	Rechenregeln	55
2.2.2	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,1}a_{y,1}$	59
2.2.3	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,q}a_{1,y}$	60
2.2.4	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{1,1}a_{1,y}$	61
2.2.5	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,1}a_{y,1}$	62
2.2.6	Reduktionswege für $a_{1,1}a_{1,1}$	63
2.2.7	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,1}a_{y,2}a_{z,2}$	64
2.2.8	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,q}a_{2,y}a_{2,z}$	65
2.2.9	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{1,1}a_{2,y}a_{2,z}$	66
2.2.10	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,1}a_{y,2}a_{z,2}$	68
2.2.11	Reduktionswege für $a_{1,1}a_{2,1}a_{2,z}$	70
2.2.12	Reduktionswege für $a_{1,1}a_{1,2}a_{z,2}$	71
2.2.13	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,2}a_{1,2}a_{1,y}$	72
2.2.14	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,q}a_{2,1}a_{y,1}$	74
2.2.15	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{1,2}a_{1,2}$	76
2.2.16	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,1}a_{2,1}$	77

2.2.17	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,2}a_{1,2}a_{2,y}a_{2,z}$	78
2.2.18	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,q}a_{2,1}a_{y,2}a_{z,2}$	80
2.2.19	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{1,2}a_{2,2}a_{2,z}$	82
2.2.20	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,1}a_{2,2}a_{z,2}$	84
2.2.21	Reduktionswege für $a_{1,1}a_{2,2}a_{2,2}$	86
2.3	Lineare Basis für $n = 2$	88
3	Projektive Auflösungen	93
3.1	Auflösung von $\mathcal{A}(n)$ als Bimodul	94
3.2	Φ_1	97
3.2.1	Übersichtstabelle für Φ_1	97
3.2.2	$r_{\text{Kern}(\Phi_1)}$	98
3.2.3	r_{fs}	98
3.2.4	Rechenregeln	99
3.2.5	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,1}e$	103
3.2.6	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,q}e$	104
3.2.7	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,2}a_{r,2}e$	105
3.2.8	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,q}a_{2,r}e$	106
3.3	Φ_2	108
3.3.1	Übersichtstabelle für Φ_2	108
3.3.2	r_{es}	109
3.3.3	$r_{\text{Kern}(\Phi_2)}$	109
3.3.4	Rechenregeln	110
3.3.5	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,n}e_{q,n}$	114
3.3.6	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,q}a_{2,n}e_{r,n}$	115
3.3.7	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{n,1}e_{n,q}$	117
3.3.8	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,2}a_{n,2}e_{n,r}$	118
3.3.9	Reduktionswege für $a_{n,n}e_{n,n}$	121
3.4	Φ_3	123
3.4.1	Übersichtstabelle für Φ_3	123
3.4.2	r_{es}	124
3.4.3	Konflikte:	124
3.4.4	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{n,1}f_{n,n}a_{n,1}$	126
3.4.5	Reduktionswege für $a_{n,1}f_{n,n}a_{n,1}a_{q,1}$	127
3.4.6	Reduktionswege für $a_{n,1}f_{n,n}a_{n,1}a_{q,2}a_{r,2}$	128
3.4.7	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{n,1}f_{n,n}a_{n,2}a_{q,2}$	130
3.4.8	Reduktionswege für $a_{p,1}a_{q,1}a_{n,2}f_{n,n}a_{n,2}$	132
3.4.9	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{1,1}a_{n,2}f_{n,n}a_{n,2}$	134
3.4.10	Reduktionswege für $a_{1,p}a_{2,q}a_{2,1}a_{n,2}f_{n,n}a_{n,2}$	136
3.4.11	Reduktionswege für $a_{n,1}f_{n,n}a_{n,2}a_{1,2}a_{1,q}$	140
3.4.12	Reduktionswege für $a_{n,1}f_{n,n}a_{n,2}a_{1,2}a_{2,q}a_{2,r}$	144
4	(Ko)-Homologie	149
4.0.13	Spezialfall $n = 1$	150
4.0.14	Auflösung für $n \geq 3$	151
4.1	Tor	153
4.1.1	$\Phi_{1*} : E \mapsto \Omega e - \Lambda e$	154

4.1.2	$\Phi_{2*} : \mathbf{F} \mapsto \Omega \mathbf{E}^t + (\Lambda \mathbf{E}^t)^t$	155
4.1.3	1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 2$	156
4.1.4	2. Fall: $\Omega = \Lambda$, also $\Omega \Lambda^t = \text{id}$	158
4.1.5	3. Fall: $\Omega = -\Lambda$, also $\Omega \Lambda^t = -\text{id}$	159
4.1.6	Allgemeiner Fall	160
4.1.7	$\Phi_{3*} : \mathbf{f} \mapsto -\text{tr}(\Lambda \Omega^t \mathbf{F}) + \text{tr}(\mathbf{F})$	164
4.2	Ext	164
4.2.1	$\phi_1^* : \bar{\mathbf{e}} \mapsto (\Omega - \Lambda) \bar{\mathbf{E}}$	165
4.2.2	$\phi_2^* : \bar{\mathbf{E}} \mapsto (\Omega^t \bar{\mathbf{F}})^t + (\Lambda^t \bar{\mathbf{F}}^t)^t$	166
4.2.3	$\phi_3^* : \bar{\mathbf{F}} \mapsto ((\Lambda \Omega^t)^t + \text{id}) \bar{\mathbf{f}}$	166