

**Multiplikatvität  
des  
de Rham Isomorphismus**

**Diplomarbeit**

**vorgelegt von**

**Johannes Härtel**

**aus**

**Frankfurt am Main**

angefertigt im Mathematischen Institut  
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005



# Multiplikatvität des de Rham Isomorphismus

Johannes Härtel

21. April 2005

## Zusammenfassung

Der Whitney-Satz besagt, dass die de Rham Kohomologie einer Mannigfaltigkeit und die simpliziale Kohomologie einer Triangulierung der Mannigfaltigkeit isomorph sind. Dieser Isomorphismus heißt **de Rham Isomorphismus** oder Whitney-Abbildung.

In dieser Arbeit wird der Whitney-Satz und die Multiplikatvität des Isomorphismus für **orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten** konstruktiv bewiesen. Auch für den Beweis der Isomorphie von  $L^2$ -de Rham Kohomologie und  $l^2$ -Simpliziale Kohomologie kann die vorgestellte Methode angewendet werden. Die Multiplikatvität des  $L^2$ -de Rham Isomorphismus wird für einen Spezialfall vorgerechnet. Für den klassischen Beweis werden auf Kettenebene zwei Abbildungen  $I$  (definiert durch Integrieren) und  $E$  (definiert durch Seiten-Simplices auswerten) konkret angegeben. Es wird gezeigt, dass  $I \circ E = \text{id}$  gilt, also  $I$  surjektiv ist. Es wird eine Kettenhomotopie  $h$  definiert und gezeigt, dass  $E \circ I - \text{id} = h$  gilt, d.h.  $I$  ist bis auf eine Kettenhomotopie injektiv. Also ist auf Kohomologie-Ebene die Abbildung  $I$  eine Bijektion mit Umkehrabbildung  $E$ .

Für Formen gibt es eine Produktstruktur, das Dachprodukt  $\wedge$ . Dieses Produkt definiert auch ein  $\wedge$ -Produkt in der de Rham Kohomologie. Für simpliziale Ketten gibt es mehrere mögliche Produkte  $\cup$ . Alle diese Produkte definieren auf Kohomologie-Ebene das gleiche  $\cup$ -Produkt.

Es wird auf Kettenebene gezeigt, dass für ein geeignetes  $\cup$ -Produkt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) & \xleftarrow{E \otimes E} & C^p(T) \otimes C^q(T) \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \cup \\ \Omega^{p+q}(M) & \xrightarrow{I} & C^{p+q}(T) \end{array}$$

Da auf Kohomologie-Ebene  $E$  die Umkehrabbildung von  $I$  ist und es auf Kohomologie-Ebene nur ein  $\cup$ -Produkt gibt, folgt, dass der de Rham Isomorphismus  $I : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{simp}^*(T)$  mit der Multiplikation verträglich ist.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>De Rham Isomorphismus und Whitney-Abbildung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>De Rham Kohomologie</b>	<b>2</b>
1.1	Differentialformen . . . . .	2
1.2	Cartansche Ableitung . . . . .	3
1.3	de Rham Kohomologie . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Simpliziale Kohomologie</b>	<b>5</b>
2.1	Sternzusammenziehbar in Bezug auf $e$ . . . . .	5
2.2	Standard-Simplex $\Delta^n$ . . . . .	6
2.3	Orientierung von $\partial\Delta^n$ . . . . .	8
2.4	Triangulierung $T$ . . . . .	8
2.5	Lokale Ordnung . . . . .	10
2.6	Singuläre Ketten $C_*^0(M)$ . . . . .	11
2.7	Simpliziale Ketten $C_*(T)$ . . . . .	12
2.8	Simpliziale Kohomologie $H(C^*(T))$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Operator <math>I : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(T)</math></b>	<b>16</b>
3.1	Definition $I$ . . . . .	16
3.2	Wohldefiniertheit von $I$ . . . . .	16
3.3	Kokettenabbildung $Id = \delta I$ . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Operator <math>E : C^*(T) \rightarrow \Omega^*(M)</math></b>	<b>18</b>
4.1	Notation . . . . .	18
4.2	Definition $\tilde{E}$ . . . . .	19
4.3	offener Stern . . . . .	21
4.4	Definition $E$ . . . . .	22
4.5	Kokettenabbildung $dE = E\delta$ . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Whitney-Satz: <math>H^*(\Omega(M)) \cong H(C^*(T))</math></b>	<b>25</b>
5.1	Whitney-Satz . . . . .	25
5.2	$I$ ist surjektiv: $I \circ E = \text{id}$ . . . . .	25
5.3	Rechenregeln für $\int d\epsilon_I$ . . . . .	25
5.4	Kettenhomotopie $\tilde{h}$ . . . . .	29
5.5	$\mathcal{P}$ auf $\Delta^n$ . . . . .	29
5.6	Eigenschaften von $\mathcal{P}$ . . . . .	30
5.7	$\mathcal{P}$ auf $M$ . . . . .	35
5.8	Formen-Verringerungsabbildung $v_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ . . . . .	35
5.9	Rechenregel für $v_k$ . . . . .	36
5.10	$I$ ist fast injektiv: $E \circ I - \text{id} = (v_{k+1}d) + (dv_k)$ . . . . .	40

<b>II</b>	<b>Multiplikation</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Wedge-Produkt <math>\wedge</math></b>	<b>42</b>
6.1	Definition $\wedge$ . . . . .	42
6.2	Eigenschaften $\wedge$ . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Cup-Produkt <math>\cup</math></b>	<b>43</b>
7.1	Definition $\cup$ . . . . .	43
7.2	verschiedene $\cup$ -Produkte . . . . .	43
7.2.1	Alexander-Whitney-Produkt: . . . . .	43
7.2.2	Misch-Produkt: . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Multiplikatitat von <math>I</math> und <math>E</math></b>	<b>46</b>
8.1	Rechenregel fur $\omega_I$ . . . . .	46
8.2	$I$ ist mit den Produkten auf Kohomologie-Niveau vertraglich . . . . .	48
<b>III</b>	<b><math>L^2</math> - deRham Satz</b>	<b>50</b>
<b>9</b>	<b><math>L^2</math>-de Rham Kohomologie</b>	<b>50</b>
9.1	Definition $\Omega_p^*(\tilde{M})$ . . . . .	50
9.2	Definition der $L^2$ -de Rham Kohomologie . . . . .	51
<b>10</b>	<b><math>l^2</math>-Simpliziale Kohomologie</b>	<b>52</b>
10.1	Definition $C_p^*(\tilde{T})$ . . . . .	52
10.2	Definition der $l^p$ -simplizialen Kohomologie . . . . .	53
<b>11</b>	<b>Multiplikatitat des <math>L^2</math>-de Rham Isomorphismus</b>	<b>54</b>
11.1	Isomorphie . . . . .	54
11.2	Satz: $L^2 \wedge L^2 \in L^1$ . . . . .	54
11.3	Rechnung fur den Spezialfall $p + q = n$ . . . . .	56
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>57</b>