Multiplikativität des de Rham Isomorphismus

Diplomarbeit

vorgelegt von

Johannes Härtel

aus
Frankfurt am Main

angefertigt im Mathematischen Institut
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005

Multiplikativität des de Rham Isomorphismus

Johannes Härtel

21. April 2005

Zusammenfassung

Der Whitney-Satz besagt, dass die de Rham Kohomologie einer Mannigfaltigkeit und die simpliziale Kohomologie einer Triangulierung der Mannigfaltigkeit isomorph sind. Dieser Isomorphismus heißt **de Rham Isomorphismus** oder Whitney-Abbildung.
In dieser Arbeit wird der Whitney-Satz und die Multiplikativität des Isomorphismus für **orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten** konstruktiv bewiesen. Auch für den Beweis der Isomorphie von L^2-de Rham Kohomologie und l^2-Simpliziale Kohomologie kann die vorgestellte Methode angewendet werden. Die Multiplikativität des L^2-de Rham Isomorphismus wird für einen Spezialfall vorgerechnet.
Für den klassischen Beweis werden auf Kettenebene zwei Abbildungen I (definiert durch Integrieren) und E (definiert durch Seiten-Simplices auswerten) konkret angegeben. Es wird gezeigt, dass $I \circ E = \text{id}$ gilt, also I surjektiv ist. Es wird eine Kettenhomotopie h definiert und gezeigt, dass $E \circ I - \text{id} = h$ gilt, d.h. I ist bis auf eine Kettenhomotopie injektiv. Also ist auf Kohomologie-Ebene die Abbildung I eine Bijektion mit Umkehrabbildung E.
Für Formen gibt es eine Produktstruktur, das Dachprodukt $\wedge$. Dieses Produkt definiert auch ein $\wedge$-Produkt in der de Rham Kohomologie. Für simpliziale Ketten gibt es mehrere mögliche Produkte $\cup$. Alle diese Produkte definieren auf Kohomologie-Ebene das gleiche $\cup$-Produkt.
Es wird auf Kettenebene gezeigt, dass für ein geeignetes $\cup$-Produkt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) \arrow[d, "\wedge"'] & C^p(T) \otimes C^q(T) \arrow[l, "E\otimes E"'] \arrow[d, "\cup"] \\ \Omega^{p+q}(M) \arrow[r, "I"] & C^{p+q}(T) \end{tikzcd}$$

Da auf Kohomologie-Ebene E die Umkehrabbildung von I ist und es auf Kohomologie-Ebene nur ein $\cup$-Produkt gibt, folgt, dass der de Rham Isomorphismus $I : H^*_{dR}(M) \to H^*_{simp}(T)$ mit der Multiplikation verträglich ist.

Inhaltsverzeichnis