

**Multiplikatvität
des
de Rham Isomorphismus**

Diplomarbeit

vorgelegt von

Johannes Härtel

aus

Frankfurt am Main

angefertigt im Mathematischen Institut
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005

Multiplikatvität des de Rham Isomorphismus

Johannes Härtel

21. April 2005

Zusammenfassung

Der Whitney-Satz besagt, dass die de Rham Kohomologie einer Mannigfaltigkeit und die simpliziale Kohomologie einer Triangulierung der Mannigfaltigkeit isomorph sind. Dieser Isomorphismus heißt **de Rham Isomorphismus** oder Whitney-Abbildung.

In dieser Arbeit wird der Whitney-Satz und die Multiplikatvität des Isomorphismus für **orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten** konstruktiv bewiesen. Auch für den Beweis der Isomorphie von L^2 -de Rham Kohomologie und l^2 -Simpliziale Kohomologie kann die vorgestellte Methode angewendet werden. Die Multiplikatvität des L^2 -de Rham Isomorphismus wird für einen Spezialfall vorgerechnet. Für den klassischen Beweis werden auf Kettenebene zwei Abbildungen I (definiert durch Integrieren) und E (definiert durch Seiten-Simplices auswerten) konkret angegeben. Es wird gezeigt, dass $I \circ E = \text{id}$ gilt, also I surjektiv ist. Es wird eine Kettenhomotopie h definiert und gezeigt, dass $E \circ I - \text{id} = h$ gilt, d.h. I ist bis auf eine Kettenhomotopie injektiv. Also ist auf Kohomologie-Ebene die Abbildung I eine Bijektion mit Umkehrabbildung E .

Für Formen gibt es eine Produktstruktur, das Dachprodukt \wedge . Dieses Produkt definiert auch ein \wedge -Produkt in der de Rham Kohomologie. Für simpliziale Ketten gibt es mehrere mögliche Produkte \cup . Alle diese Produkte definieren auf Kohomologie-Ebene das gleiche \cup -Produkt.

Es wird auf Kettenebene gezeigt, dass für ein geeignetes \cup -Produkt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) & \xleftarrow{E \otimes E} & C^p(T) \otimes C^q(T) \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \cup \\ \Omega^{p+q}(M) & \xrightarrow{I} & C^{p+q}(T) \end{array}$$

Da auf Kohomologie-Ebene E die Umkehrabbildung von I ist und es auf Kohomologie-Ebene nur ein \cup -Produkt gibt, folgt, dass der de Rham Isomorphismus $I : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{simp}^*(T)$ mit der Multiplikation verträglich ist.

Inhaltsverzeichnis

I	De Rham Isomorphismus und Whitney-Abbildung	1
1	De Rham Kohomologie	2
1.1	Differentialformen	2
1.2	Cartansche Ableitung	3
1.3	de Rham Kohomologie	4
2	Simpliziale Kohomologie	5
2.1	Sternzusammenziehbar in Bezug auf e	5
2.2	Standard-Simplex Δ^n	6
2.3	Orientierung von $\partial\Delta^n$	8
2.4	Triangulierung T	8
2.5	Lokale Ordnung	10
2.6	Singuläre Ketten $C_*^0(M)$	11
2.7	Simpliziale Ketten $C_*(T)$	12
2.8	Simpliziale Kohomologie $H(C^*(T))$	14
3	Operator $I : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(T)$	16
3.1	Definition I	16
3.2	Wohldefiniertheit von I	16
3.3	Kokettenabbildung $Id = \delta I$	17
4	Operator $E : C^*(T) \rightarrow \Omega^*(M)$	18
4.1	Notation	18
4.2	Definition \tilde{E}	19
4.3	offener Stern	21
4.4	Definition E	22
4.5	Kokettenabbildung $dE = E\delta$	23
5	Whitney-Satz: $H^*(\Omega(M)) \cong H(C^*(T))$	25
5.1	Whitney-Satz	25
5.2	I ist surjektiv: $I \circ E = \text{id}$	25
5.3	Rechenregeln für $\int d\epsilon_I$	25
5.4	Kettenhomotopie \tilde{h}	29
5.5	\mathcal{P} auf Δ^n	29
5.6	Eigenschaften von \mathcal{P}	30
5.7	\mathcal{P} auf M	35
5.8	Formen-Verringerungsabbildung $v_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$	35
5.9	Rechenregel für v_k	36
5.10	I ist fast injektiv: $E \circ I - \text{id} = (v_{k+1}d) + (dv_k)$	40

II	Multiplikation	42
6	Wedge-Produkt \wedge	42
6.1	Definition \wedge	42
6.2	Eigenschaften \wedge	42
7	Cup-Produkt \cup	43
7.1	Definition \cup	43
7.2	verschiedene \cup -Produkte	43
7.2.1	Alexander-Whitney-Produkt:	43
7.2.2	Misch-Produkt:	44
8	Multiplikatitat von I und E	46
8.1	Rechenregel fur ω_I	46
8.2	I ist mit den Produkten auf Kohomologie-Niveau vertraglich	48
III	L^2 - deRham Satz	50
9	L^2-de Rham Kohomologie	50
9.1	Definition $\Omega_p^*(\tilde{M})$	50
9.2	Definition der L^2 -de Rham Kohomologie	51
10	l^2-Simpliziale Kohomologie	52
10.1	Definition $C_p^*(\tilde{T})$	52
10.2	Definition der l^p -simplizialen Kohomologie	53
11	Multiplikatitat des L^2-de Rham Isomorphismus	54
11.1	Isomorphie	54
11.2	Satz: $L^2 \wedge L^2 \in L^1$	54
11.3	Rechnung fur den Spezialfall $p + q = n$	56
	Literaturverzeichnis	57