

**Multiplikatvität  
des  
de Rham Isomorphismus**

**Diplomarbeit**

**vorgelegt von**

**Johannes Härtel**

**aus**

**Frankfurt am Main**

angefertigt im Mathematischen Institut  
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2005



# Multiplikatvität des de Rham Isomorphismus

Johannes Härtel

21. April 2005

## Zusammenfassung

Der Whitney-Satz besagt, dass die de Rham Kohomologie einer Mannigfaltigkeit und die simpliziale Kohomologie einer Triangulierung der Mannigfaltigkeit isomorph sind. Dieser Isomorphismus heißt **de Rham Isomorphismus** oder Whitney-Abbildung.

In dieser Arbeit wird der Whitney-Satz und die Multiplikatvität des Isomorphismus für **orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten** konstruktiv bewiesen. Auch für den Beweis der Isomorphie von  $L^2$ -de Rham Kohomologie und  $l^2$ -Simpliziale Kohomologie kann die vorgestellte Methode angewendet werden. Die Multiplikatvität des  $L^2$ -de Rham Isomorphismus wird für einen Spezialfall vorgerechnet. Für den klassischen Beweis werden auf Kettenebene zwei Abbildungen  $I$  (definiert durch Integrieren) und  $E$  (definiert durch Seiten-Simplices auswerten) konkret angegeben. Es wird gezeigt, dass  $I \circ E = \text{id}$  gilt, also  $I$  surjektiv ist. Es wird eine Kettenhomotopie  $h$  definiert und gezeigt, dass  $E \circ I - \text{id} = h$  gilt, d.h.  $I$  ist bis auf eine Kettenhomotopie injektiv. Also ist auf Kohomologie-Ebene die Abbildung  $I$  eine Bijektion mit Umkehrabbildung  $E$ .

Für Formen gibt es eine Produktstruktur, das Dachprodukt  $\wedge$ . Dieses Produkt definiert auch ein  $\wedge$ -Produkt in der de Rham Kohomologie. Für simpliziale Ketten gibt es mehrere mögliche Produkte  $\cup$ . Alle diese Produkte definieren auf Kohomologie-Ebene das gleiche  $\cup$ -Produkt.

Es wird auf Kettenebene gezeigt, dass für ein geeignetes  $\cup$ -Produkt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) & \xleftarrow{E \otimes E} & C^p(T) \otimes C^q(T) \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \cup \\ \Omega^{p+q}(M) & \xrightarrow{I} & C^{p+q}(T) \end{array}$$

Da auf Kohomologie-Ebene  $E$  die Umkehrabbildung von  $I$  ist und es auf Kohomologie-Ebene nur ein  $\cup$ -Produkt gibt, folgt, dass der de Rham Isomorphismus  $I : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{simp}^*(T)$  mit der Multiplikation verträglich ist.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>De Rham Isomorphismus und Whitney-Abbildung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>De Rham Kohomologie</b>	<b>2</b>
1.1	Differentialformen . . . . .	2
1.2	Cartansche Ableitung . . . . .	3
1.3	de Rham Kohomologie . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Simpliziale Kohomologie</b>	<b>5</b>
2.1	Sternzusammenziehbar in Bezug auf $e$ . . . . .	5
2.2	Standard-Simplex $\Delta^n$ . . . . .	6
2.3	Orientierung von $\partial\Delta^n$ . . . . .	8
2.4	Triangulierung $T$ . . . . .	8
2.5	Lokale Ordnung . . . . .	10
2.6	Singuläre Ketten $C_*^0(M)$ . . . . .	11
2.7	Simpliziale Ketten $C_*(T)$ . . . . .	12
2.8	Simpliziale Kohomologie $H(C^*(T))$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Operator <math>I : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(T)</math></b>	<b>16</b>
3.1	Definition $I$ . . . . .	16
3.2	Wohldefiniertheit von $I$ . . . . .	16
3.3	Kokettenabbildung $Id = \delta I$ . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Operator <math>E : C^*(T) \rightarrow \Omega^*(M)</math></b>	<b>18</b>
4.1	Notation . . . . .	18
4.2	Definition $\tilde{E}$ . . . . .	19
4.3	offener Stern . . . . .	21
4.4	Definition $E$ . . . . .	22
4.5	Kokettenabbildung $dE = E\delta$ . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Whitney-Satz: <math>H^*(\Omega(M)) \cong H(C^*(T))</math></b>	<b>25</b>
5.1	Whitney-Satz . . . . .	25
5.2	$I$ ist surjektiv: $I \circ E = \text{id}$ . . . . .	25
5.3	Rechenregeln für $\int d\epsilon_I$ . . . . .	25
5.4	Kettenhomotopie $\tilde{h}$ . . . . .	29
5.5	$\mathcal{P}$ auf $\Delta^n$ . . . . .	29
5.6	Eigenschaften von $\mathcal{P}$ . . . . .	30
5.7	$\mathcal{P}$ auf $M$ . . . . .	35
5.8	Formen-Verringerungsabbildung $v_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ . . . . .	35
5.9	Rechenregel für $v_k$ . . . . .	36
5.10	$I$ ist fast injektiv: $E \circ I - \text{id} = (v_{k+1}d) + (dv_k)$ . . . . .	40

<b>II</b>	<b>Multiplikation</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Wedge-Produkt <math>\wedge</math></b>	<b>42</b>
6.1	Definition $\wedge$ . . . . .	42
6.2	Eigenschaften $\wedge$ . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Cup-Produkt <math>\cup</math></b>	<b>43</b>
7.1	Definition $\cup$ . . . . .	43
7.2	verschiedene $\cup$ -Produkte . . . . .	43
7.2.1	Alexander-Whitney-Produkt: . . . . .	43
7.2.2	Misch-Produkt: . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Multiplikatitat von <math>I</math> und <math>E</math></b>	<b>46</b>
8.1	Rechenregel fur $\omega_I$ . . . . .	46
8.2	$I$ ist mit den Produkten auf Kohomologie-Niveau vertraglich . . . . .	48
<b>III</b>	<b><math>L^2</math> - deRham Satz</b>	<b>50</b>
<b>9</b>	<b><math>L^2</math>-de Rham Kohomologie</b>	<b>50</b>
9.1	Definition $\Omega_p^*(\tilde{M})$ . . . . .	50
9.2	Definition der $L^2$ -de Rham Kohomologie . . . . .	51
<b>10</b>	<b><math>l^2</math>-Simpliziale Kohomologie</b>	<b>52</b>
10.1	Definition $C_p^*(\tilde{T})$ . . . . .	52
10.2	Definition der $l^p$ -simplizialen Kohomologie . . . . .	53
<b>11</b>	<b>Multiplikatitat des <math>L^2</math>-de Rham Isomorphismus</b>	<b>54</b>
11.1	Isomorphie . . . . .	54
11.2	Satz: $L^2 \wedge L^2 \in L^1$ . . . . .	54
11.3	Rechnung fur den Spezialfall $p + q = n$ . . . . .	56
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>57</b>



## Teil I

# De Rham Isomorphismus und Whitney-Abbildung

Oft ist es schwierig festzustellen, ob zwei Räume homöomorph sind. Um festzustellen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind, nutzt man Invarianten. Eine Möglichkeit eine Invariante zu konstruieren, bieten die Kohomologie-Theorien. Eine Kohomologie-Theorie liefert für jeden Raum eine Gruppe; sind für zwei Räume die Gruppen unterschiedlich, so können die Räume nicht homöomorph sein. Es gibt viele verschiedene Kohomologie-Theorien.

Durch die Formen auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  erhält man die de Rham Kohomologie  $H_{dR}^*(M)$ ; sie wird im ersten Kapitel definiert. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie  $M$  eine Triangulierung  $T$  zugeordnet wird. Für Triangulierungen kann die simpliziale Kohomologie  $H_{simp}^*(T)$  definiert werden (siehe Kapitel 3). Der Whitney-Satz besagt, dass es einen Isomorphismus zwischen der de Rham Kohomologie  $H_{dR}^*(M)$  und der simpliziale Kohomologie  $H_{simp}^*(T)$  (für jede Triangulierung  $T$  der Mannigfaltigkeit  $M$ ) gibt. Um eine Mannigfaltigkeit (auf diese Eigenschaft) zu untersuchen, reicht es demnach, die simpliziale Kohomologie  $H_{simp}^*(T)$  von einer ihrer Triangulierungen zu berechnen.

Für glatte, lokal kompakte Mannigfaltigkeiten kann (und wird in den folgenden Kapiteln) der Isomorphismus angegeben werden, indem man die Abbildungen auf den Koketten lokal definiert.

# 1 De Rham Kohomologie

Viele Kohomologie-Theorien erhält man, indem man den (kontravarianten) Hom-Funktor auf eine Homologie-Theorie anwendet. Für die de Rham Kohomologie trifft das nicht zu, sie wird mit Hilfe der Analysis direkt definiert.

Für Mannigfaltigkeiten können  $k$ -Formen definiert werden. Die Menge der  $k$ -Formen bilden eine Gruppe  $\Omega^k(M)$ . Die Cartansche Ableitung  $d$  ist eine Randabbildung von den  $k$ -Formen in die  $(k + 1)$ -Formen, die  $d \circ d = 0$  erfüllt.

Hier eine kurze Wiederholung der benötigten Sätze und Definitionen aus der Analysis. Die Beweise können in [8] nachgelesen werden.

## 1.1 Differentialformen

### Definition 1.1 (glatte Mannigfaltigkeit $M$ )

Eine glatte Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M, \mathcal{A})$ , wobei  $M$  ein Hausdorffraum (punkttrennend), mit einer abzählbaren Basis der Topologie ist, und  $\mathcal{A}$  ein  $n$ -dimensionaler glatter (also unendlich oft differenzierbarer) Atlas auf  $M$ .

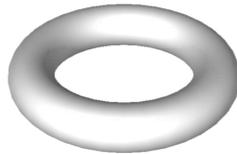


Abbildung 1: Der Torus ist eine Mannigfaltigkeit.

### Definition 1.2 (Differentialform $\omega$ )

Eine  $k$ -Form auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Zuordnung  $\omega$ , die jedem  $x \in M$  eine alternierende  $k$ -Form  $\omega_x \in \text{Alt}^k T_x M$  auf dem Tangentialraum bei  $x$  zuweist.

Der Vektorraum der differenzierbaren  $k$ -Formen auf  $M$  wird mit  $\Omega^k M$  bezeichnet.

### Bemerkung 1.3

- Da  $\text{Alt}^0 T_x M \cong \mathbb{R}$ , ist auch  $\Omega^0 M \cong C^\infty(M)$  (der Ring der differenzierbaren Funktionen auf  $M$ ).
- Die differenzierbaren 1-Formen, also die  $\omega \in \Omega^1 M$ , heißen Pfaffsche Formen.

### Definition 1.4 (orientierte Mannigfaltigkeit)

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt orientiert, wenn jeder ihrer Tangentialräume so orientiert ist, dass der Atlas der Mannigfaltigkeit aus orientierungserhaltenden Karten besteht. Die Karten  $\mathcal{K}$  haben also die Eigenschaft, dass das Differential  $d\mathcal{K} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Orientierung von  $T_x M$  in die übliche Orientierung von  $\mathbb{R}^n$  überführt, wobei  $x \in M$  ein Punkt im Kartengebiet von  $\mathcal{K}$  sein soll.

### Bemerkung 1.5

Ab jetzt ist jede Mannigfaltigkeit als glatte orientierbare Mannigfaltigkeit zu verstehen.

## 1.2 Cartansche Ableitung

Aus einer  $k$ -Form auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  erhält man mittels der Cartanschen Ableitung eine  $(k + 1)$ -Form. Da  $M$  glatt, insbesondere differenzierbar ist, reicht es die Ableitung auf Kartengebieten zu definieren und anschließend mit Hilfe von Teilung-der-Eins-Funktionen auf ganz  $M$  fortzusetzen. In einer Karte lässt sich jede  $k$ -Form  $\eta$  schreiben als

$$\eta = \sum_{I_{1,k}} \eta_{I_{1,k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

wobei  $(d\eta_{I_{1,k}})$  0-Formen (also Funktionen) sind, und  $I_{1,k} = (i_1, \dots, i_k)$  ein aufsteigend sortiertes Tupel mit unterschiedlichen Einträgen zwischen 1 und der Dimension von  $M$  ist, also  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \dim(M)$ .

$\wedge$  ist an dieser Stelle das bekannte Dachprodukt, auf das ich im zweiten Teil (8) genauer eingehen werden.

### Definition 1.6 (Cartansche Ableitung $d$ )

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Abbildung  $d : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1}$ , definiert durch

$$d\eta := \sum_{I_{1,k}} (d\eta_{I_{1,k}}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

heißt **äußere** oder **Cartansche Ableitung**, wobei  $(d\eta_{I_{1,k}})$  das übliche Differential einer Funktion ist.

### Satz 1.7 (Eigenschaften der Cartansche Ableitung)

Die Cartansche Ableitung erfüllt die folgenden Bedingungen:

- *Wohldefiniertheit:*  $\text{Bild}(d) \subset \Omega^{k+1}(M)$ .
- *Differentialbedingung:* für  $f \in \Omega^0 M$  ist  $df \in \Omega^1 M$  das übliche Differential von  $f$ .
- *Komplexeigenschaft:* es gilt:  $d \circ d = 0$ .
- *Produktregel:* sei  $\omega \in \Omega^p M$  und  $\eta \in \Omega^q M$ , mit  $p + q \leq \dim(M)$ , dann gilt:  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$ .
- *Natürlichkeit:* ist  $g : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ , dann gilt:  $g^*(d\eta) = d(g^*\eta)$ , wobei  $\eta \in \Omega^k N$  und  $g^*$  die Zurückziehung über  $g$  ist.

### Bemerkung 1.8

Die Cartansche Ableitung ist die einzige Möglichkeit, eine Sequenz linearer Abbildungen zu definieren, die die obigen Eigenschaften erfüllt.

**Satz 1.9 (Stokes)**

Sei  $M$  eine orientierte berandete Mannigfaltigkeit und sei  $\varpi \in \Omega^{\dim(M)-1}M$  eine  $(\dim(M)-1)$ -Form mit kompaktem Träger, dann gilt:

$$\int_M d\varpi = \int_{\partial M} \varpi,$$

wobei  $\partial M$  der Rand der Mannigfaltigkeit  $M$  sein soll und die Orientierung des Randes von der Orientierung der Mannigfaltigkeit übertragen wird, indem der erste Basisvektor nach außen zeigt.<sup>1</sup>

**1.3 de Rham Kohomologie****Definition 1.10 (de Rham Komplex)**

Der durch die Cartansche Ableitung definierte Kettenkomplex

$$0 \rightarrow \Omega^0 M \xrightarrow{d} \Omega^1 M \xrightarrow{d} \Omega^2 M \xrightarrow{d} \dots$$

heißt **de Rham Komplex**.

Da  $\Omega^k M = 0$  für  $k > \dim(M)$  gilt, ist der de Rham Komplex endlich. Deshalb spricht man vom endlichen de Rham Komplex:

$$0 \rightarrow \Omega^0 M \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{\dim(M)} M \xrightarrow{d} 0.$$

**Bemerkung 1.11**

Mit der Natürlichkeit von  $d$  ist die Konstruktion des de Rham Komplexes ein kontravarianter Funktor von der differenzierbaren Kategorien in die Kategorie der Komplexe mit Kettenhomomorphismen.

Da  $\Omega^k M$  ein Vektorraum und  $d$  eine lineare Abbildung ist, ist auch  $\text{Bild}(d)$  bzw.  $\text{Kern}(d)$  jeweils ein Vektorraum. Die Komplexeigenschaft der Cartanschen Ableitung garantiert, dass ausserdem gilt:

$$\text{Bild}(d) \subset \text{Kern}(d).$$

Der Quotient von ineinanderliegenden Vektorräumen ist wieder ein Vektorraum, deshalb kann man definieren:

**Definition 1.12 (de Rham Kohomologie  $H_{dR}^k(M)$ )**

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt der Quotientenvektorraum:

$$H_{dR}^k(M) := \frac{\text{Kern}(d : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1} M)}{\text{Bild}(d : \Omega^{k-1} M \rightarrow \Omega^k M)}$$

die  **$k$ -te de Rham Kohomologie** von  $M$ .

Die  $k$ -Formen im Bild von  $d$  heißen  $k$ -dimensionale **Koränder**, die im Kern **Kozykel**.

<sup>1</sup>Die Orientierung ist so gewählt, dass in der Formel keine Vorzeichen auftreten.

## 2 Simpliziale Kohomologie

Anstelle der Mannigfaltigkeit wird nun die Triangulierung der Mannigfaltigkeit betrachtet. Eine Triangulierung besteht aus Simplices<sup>2</sup> (Punkten, Strecken, Dreiecken, Tetraeder, ...) und ist homöomorph zur Mannigfaltigkeit. Die simpliziale Kohomologie erhält man durch Anwenden des Hom-Funktors ( $Hom(\cdot, \mathbb{R})$ ) auf die simpliziale Homologie. Sie hat stetige Abbildungen aus einem Simplex auf die Triangulierung als Ketten. Mit dem Hom-Funktor erhält man für die Kohomologie Abbildungen von den Simplices in die reellen Zahlen als Koketten.

### 2.1 Sternzusammenziehbar in Bezug auf $e$

Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $e \in V$ .

#### Definition 2.1 (sternzusammenziehbar)

$V$  heißt **sternzusammenziehbar** in Bezug auf  $e$ , wenn für alle  $v \in V$  die Strecke zwischen  $v$  und  $e$  ganz in  $V$  liegt.

#### Beispiel 2.2

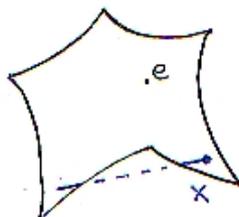


Abbildung 2: Sternzusammenziehbarer Raum in Bezug auf  $e$ .

Dieser Raum ist nicht sternzusammenziehbar in Bezug auf  $x$ .

#### Definition 2.3 (Sternzusammenziehung)

Sei  $e \in V$  und sei  $V$  sternzusammenziehbar, dann heißt eine Homotopie  $h : [0, 1] \times V \rightarrow V$  mit den Eigenschaften:

1.  $h(1, v) = e$
2.  $h(0, v) = v$

**Sternzusammenziehung** von  $V$  auf  $e$ .

<sup>2</sup>Anstelle von Simplices könnte man auch andere Bausteine wählen, zum Beispiel Zellen. Durch sie erhält man die zellulären Koketten.

## 2.2 Standard-Simplex $\Delta^n$

### Definition 2.4 (Standard-Simplex)

Alle Punkte  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , die folgende Eigenschaften erfüllen, bilden den **Standard-Simplex  $\Delta^n$** :

1.  $x_\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda = 0, \dots, n$
2.  $\sum_{\lambda=0}^n x_\lambda = 1$

Der Simplex ist also in baryzentrischen Koordinaten gegeben.

### Bemerkung 2.5

$\Delta^n$  sind gerade die Punkte, die man erhält, wenn man die konvexe Hülle der Basisvektoren  $(e_0, \dots, e_n)$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  auswählt. Die Punkte  $e_0, \dots, e_n$  sind die Ecken des Standard-Simplex  $\Delta^n$ .

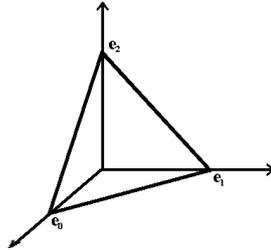


Abbildung 3: Zweidimensionaler Standard-Simplex eingebettet in  $\mathbb{R}^3$ .

### Lemma 2.6 ( $\Delta^n$ ist sternzusammenziehbar)

Der Standard-Simplex  $\Delta^n$  ist sternzusammenziehbar in Bezug auf jeden Eckpunkt.

**Beweis:** Behauptung:  $\Delta^n$  ist konvex. Seien  $x = (x_0, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n) \in \Delta^n$ . Jeder Punkt  $p = (p_0, \dots, p_n)$  auf der Strecke zwischen  $x$  und  $y$  lässt sich darstellen als  $p = sx + (1-s)y$  mit  $s \in [0, 1]$ .

Da  $x_\lambda, y_\lambda \in [0, 1]$  für  $\lambda = 0, \dots, n$ , gilt auch  $sx_\lambda + (1-s)y_\lambda \in [0, 1]$ .

Aus  $\sum_{\lambda=0}^n x_\lambda = \sum_{\lambda=0}^n y_\lambda = 1$  folgt:

$$\sum_{\lambda=0}^n p_\lambda = \sum_{\lambda=0}^n sx_\lambda + (1-s)y_\lambda = s \sum_{\lambda=0}^n (x_\lambda) + (1-s) \sum_{\lambda=0}^n (y_\lambda) = s \cdot 1 + (1-s) \cdot 1 = 1.$$

Also liegt auch für jeden Eckpunkt die Strecke zu jedem Punkt aus  $\Delta^n$  ganz im Standard-Simplex.  $\diamond$

### Definition 2.7 (baryzentrische Sternzusammenziehung $\tilde{h}_i$ :)

Auf einem Simplex gibt es eine durch die Koordinaten induzierte Sternzusammenziehung  $\tilde{h}_i : I \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$

$$\tilde{h}_i(t, x_0, \dots, x_k) := (1-t)x + te_i.$$

Sie heißt **baryzentrische Sternzusammenziehung**.

**Bemerkung 2.8**

Da die Basisvektoren durchnummeriert sind, erhält man eine Anordnung der Ecken, also eine eindeutige Orientierung von  $\Delta^n$ . Die Basisvektoren der Orientierung sind  $e_0\vec{e}_1, \dots, e_0\vec{e}_n$ .

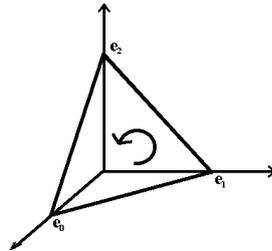


Abbildung 4: Orientierung des Standard-Simplex.

**Bemerkung 2.9**

Für die baryzentrischen Koordinaten des Standard-Simplex gilt:  $\sum_{\lambda=0}^n x_\lambda = 1$  und daher auch:

$$\sum_{\lambda=0}^n dx_\lambda = 1.$$

**Definition 2.10 (Einbettung  $\varepsilon$ )**

Eine Einbettung des  $n$ -Simplex in den  $(n + 1)$ -Simplex erhält man, indem man an der  $i$ -ten Stelle eine 0 einfügt. Für jedes  $i = 0, \dots, n + 1$  existiert dann eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i : \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

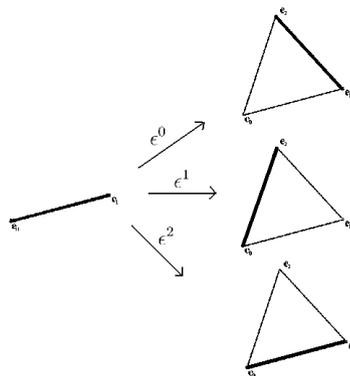


Abbildung 5: Einbettungen des zweidimensionalen Simplex.

### 2.3 Orientierung von $\partial\Delta^n$

$\Delta^{n+1}$  ist eine orientierte  $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt  $x \in \Delta^{n+1}$  ist  $e_0\vec{e}_1, \dots, e_0\vec{e}_{n+1}$  die orientierte Basis auf  $T_x\Delta^{n+1}(= \Delta^{n+1})$ .

Sei  $y \in \partial\Delta^{n+1}$  und sei  $(g_1, \dots, g_n)$  eine Basis auf  $T_y(\partial\Delta^{n+1})$ . Der Rand einer Mannigfaltigkeit ist nach Konvention (Satz von Stokes 1.9) so orientiert, dass für einen (und damit jeden) nach außen weisenden Vektor  $v$  die Basis  $(v, g_1, \dots, g_n)$  positiv orientiert ist. Jedes Seiten-Simplex kann so orientiert werden. Aber ein Seiten-Simplex ist auch ein  $n$ -dimensionaler Simplex und als solcher orientierbar. Diese Orientierungen sind nicht notwendigerweise gleich.

Betrachte den Seiten-Simplex, der der Ecke  $e_{n+1}$  gegenüberliegt:

als  $n$ -dimensionaler Simplex ist er durch seine Ecken orientiert. Die Basis ist  $(e_0\vec{e}_1, \dots, e_0\vec{e}_n)$ .

Ein nach außen zeigender Vektor in  $\Delta^{n+1}$  ist zum Beispiel  $(-e_0\vec{e}_{n+1})$ .

Überführt man die Basis  $(-e_0\vec{e}_{n+1}, e_0\vec{e}_1, \dots, e_0\vec{e}_n)$  in die Basis  $(e_0\vec{e}_1, \dots, e_0\vec{e}_n, e_0\vec{e}_{n+1})$ , ändert sich die Orientierung um  $(-1)^{n+1}$ .

### 2.4 Triangulierung $T$

Simpliziale Komplexe sind die Bausteine der kombinatorischen Topologie. Durch stückweise lineare Objekte (Simplices) werden geometrische Objekte beschrieben und deren Eigenschaften mit kombinatorischen Methoden erfasst. Die folgenden Definitionen und Sätze finden sich auch in [3].

#### Definition 2.11 (Simplizialer Komplex $K$ )

Seien  $E$  eine Menge von Ecken und  $S$  eine Menge von endlichen Teilmengen von  $E$ . Eine Menge  $s \in S$  mit  $p + 1$  Elementen heißt  $p$ -Simplex. Wenn folgende Axiome gelten, dann heißt  $K=(E,S)$  **simplizialer Komplex**.

- Jede einpunktige Teilmenge von  $E$  kommt in  $S$  vor, ist also ein 0-Simplex.
- Jede nichtleere Teilmenge von  $s \in S$  kommt in  $S$  vor, die Seiten eines Simplex sind also wieder Simplices.

Ein simplizialer Komplex heißt  $n$ -dimensional, wenn er mindestens einen  $n$ -Simplex enthält, aber keinen  $(n + 1)$ -Simplex.

#### Definition 2.12 (geometrische Realisierung)

Sei  $K$  ein simplizialer Komplex, dann heißt eine Menge von Funktionen  $\alpha : E \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\{e \in E | \alpha(e) > 0\}$  ist ein Simplex in  $K$ ,
- $\sum_{e \in E} \alpha(e) = 1$ ,

**geometrische Realisierung  $|K|$  von  $K$ .**

**Definition 2.13 (Triangulierung)**

Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $K$  ein simplizialer Komplex.  
Ein Homöomorphismus  $T : |K| \rightarrow X$  heißt Triangulierung von  $X$ .

**Satz 2.14 (glatte Triangulierung)**

Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es eine Triangulierung  $T$ , so dass sie auf jedem Simplex eine glatte Einbettung ist. Eine solche Triangulierung heißt glatt.

**Beweis:**

siehe [18] und [12]

◇

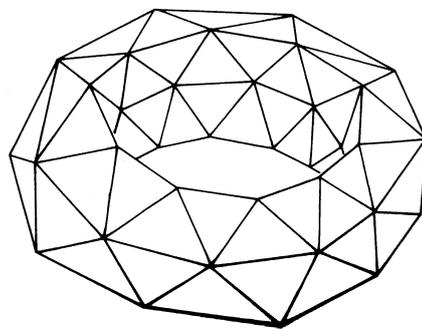


Abbildung 6: Triangulierung des Torus.

## 2.5 Lokale Ordnung

Für die Rechnungen mit Simplices der Triangulierung ist es von Vorteil, wenn die Ecken jedes Simplex geordnet sind. Um (später) Produkte bilden zu können, ist eine Ordnung sogar notwendig. Weiterführende Beispiele zur lokalen Ordnung finden sich in [16].

### Definition 2.15 (geordnetes Simplex)

Sei  $\sigma$  ein  $k$ -Simplex mit einer ausgezeichneten Ordnung auf den Ecken. Der **geordnete Simplex** wird als:

$$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k)$$

geschrieben.

Jeder Seiten-Simplex  $\varsigma$  eines geordneten Simplex  $\sigma$  ist als Teilmenge von  $\sigma$  wieder geordnet. In einer Triangulierung kann ein Simplex  $\varsigma$  Seiten-Simplex von mehreren Simplices sein, so dass die induzierten Ordnungen nicht übereinstimmen. Solche Konflikte sollen vermieden werden.

### Definition 2.16 (lokale Ordnung)

Sei  $K$  ein simplizialer Komplex. Für jeden Simplex  $\sigma$  von  $K$  sei eine Anordnung seiner Ecken ausgezeichnet, so dass folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist  $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  ein geordneter Simplex, dann ist die Ordnung jedes Seiten-Simplex  $\varsigma$  gleich der Ordnung, die durch  $\sigma$  induziert wird.

Man sagt dann, in  $K$  sei eine **lokale Ordnung** gegeben.

### Bemerkung 2.17

Eine lokale Ordnung muss nicht mit der Orientierung verträglich sein.

Eine Triangulierung einer Mannigfaltigkeit kann global, durch eine Anordnung aller Ecken, geordnet werden. Eine Triangulierung einer  $G$ -Mannigfaltigkeit kann in der Regel nicht global geordnet werden.

### Bemerkung 2.18

Ab jetzt ist jede Triangulierung als Triangulierung mit lokaler Ordnung zu verstehen.

### 2.6 Singuläre Ketten $C_*^0(M)$

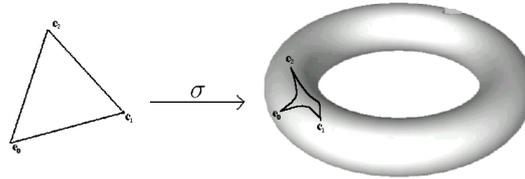


Abbildung 7: Singuläre Kette.

**Definition 2.19 (singuläre Ketten)**

Betrachte stetige Abbildungen von  $\Delta^n$  in die Mannigfaltigkeit  $M$ . Die Menge dieser Abbildungen heiße  $S_n^0(M)$ .

Die freie abelsche Gruppe mit reellen Koeffizienten über diesen Abbildungen heiße  $C_n^0(M)$ . Ihre Elemente heißen **singuläre Ketten**. Es sind nur endliche Summen zugelassen.

**Bemerkung 2.20**

Die Elemente in  $c \in C_n^0(M)$  sind formale Summen:

$$c = \sum_{\sigma \in S_n^0(M)} c_\sigma \cdot \sigma.$$

Dabei ist  $c_\sigma$  für jeden Simplex eine reelle Zahl.

**Bemerkung 2.21**

Aus einem Element  $\sigma \in S_n^0(M)$  erhält man mit einer Einbettung  $\epsilon$  durch  $\epsilon^*(\sigma) := \sigma \circ \epsilon$  ein Element in  $S_{n-1}^0(M)$ .

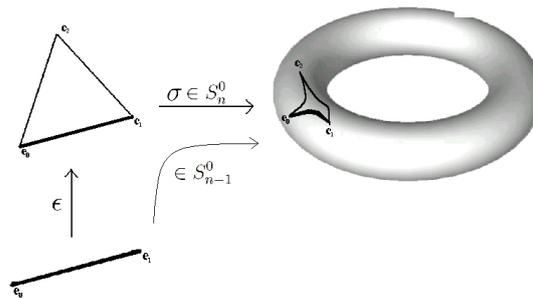


Abbildung 8:  $\epsilon^*(\sigma) \in S_{n-1}^0(M)$ .

**Bemerkung 2.22**

Um Eigenschaften von  $c \in C_n^0(M)$  zu beschreiben, reicht es, die Elemente in  $S_n^0(M)$  zu betrachten und die Ergebnisse linear fortzusetzen.

Also lässt sich  $\epsilon$  auf  $C_n^0(M)$  fortsetzen.

## 2.7 Simpliziale Ketten $C_*(T)$

Sei  $T$  eine glatte Triangulierung der Mannigfaltigkeit  $M$ . Betrachte nur noch diejenigen Abbildungen, die ein  $\Delta^n$  in die Triangulierung einbetten, so dass jeweils Ecken auf Ecken abgebildet werden.

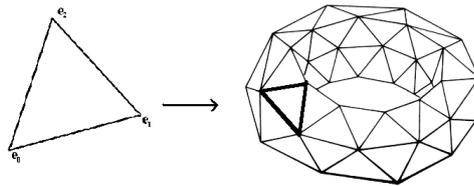


Abbildung 9: Simpliziale Kette.

### Definition 2.23 (simpliziale Kette)

Die Menge der Abbildungen von  $\Delta^n$  auf einen  $n$ -Simplex in der Triangulierung heißt  $S_n(T)$ . Die freie abelsche Gruppe mit reellen Koeffizienten über diese Abbildungen heißt  $\mathbb{Z}S_n(T)$ . Von der Anordnung der Ecken soll nur die Orientierung eine Rolle spielen. Daher definiere die Quotientengruppe

$$C_n(T) = \frac{\mathbb{Z}S_n(T)}{\langle \sigma \circ \pi - (\text{sgn}(\pi)) \cdot \sigma \rangle},$$

wobei  $\sigma \in \mathbb{Z}S_n(T)$ , und  $\pi$  eine Permutation auf den Ecken ist. Die Elemente von  $C_n(T)$  heißen simpliziale  $n$ -Ketten.

### Bemerkung 2.24

Für singuläre Ketten konnte man die Abbildungen  $\varepsilon^*$  definieren. Da jeder  $n$ -Simplex  $(n-1)$ -dimensionale Kanten besitzt, kann man  $\varepsilon^*$  auch für simpliziale Ketten definieren.

**Definition 2.25 ( $\mathcal{U}_i$ )**

Die Abbildung, die einem  $n$ -Simplex der Triangulierung eines seiner  $(n - 1)$  dimensionalen Seiten-Simplices zuordnet, definiert man wie folgt:

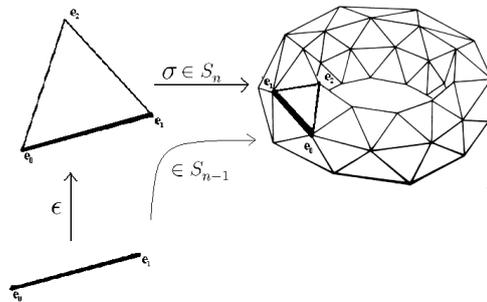


Abbildung 10:  $\mathcal{U}_i(\sigma) := \sigma \circ \varepsilon^i$ .

**Bemerkung 2.26**

$\mathcal{U}_i$  ordnet einem angeordneten Simplex das Seiten-Simplex ohne die Ecke  $e_i$  zu.

**Definition 2.27 (Simplizialer Kettenkomplex)**

Die Einbettungen  $\varepsilon^*$  liefern eine Randabbildung  $\partial: C_n(T) \rightarrow C_{n-1}(T)$ , definiert durch:

$$\partial(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{\mathcal{U}_i(\sigma)}_{=\sigma \circ \varepsilon^i},$$

für  $\sigma \in S_n(T)$ .

$(C_*(T), \partial)$  heißt **simplizialer Kettenkomplex**.

**Bemerkung 2.28**

Zwei Ketten  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$ , die  $\Delta^n$  auf das gleiche Simplex der Triangulierung abbilden, unterscheiden sich höchstes durch ihr Vorzeichen. Das Vorzeichen ist so gewählt, dass es mit der Orientierung der Mannigfaltigkeit  $M$  verträglich ist, also die durch  $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} T$  induzierte Orientierung gleich der Orientierung von  $M$  ist.

## 2.8 Simpliziale Kohomologie $H(C^*(T))$

### Definition 2.29 (simpliziale Koketten)

Der Raum der linearen Abbildungen von  $C_*(T)$  nach  $\mathbb{R}$  wird mit:

$$C^*(T) := \text{HOM}(C_*(T), \mathbb{R}) \text{ bezeichnet.}$$

Seine Elemente heißen **simpliziale Koketten**.

### Bemerkung 2.30

Simpliziale  $n$ -Koketten ordnen jedem  $n$ -Simplex eine reelle Zahl zu.

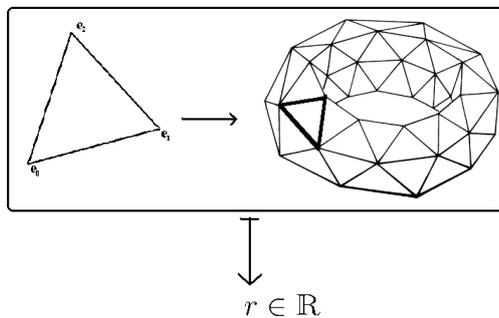


Abbildung 11: Simpliziale Kokette.

### Definition 2.31 (simplizialer Kokettenkomplex)

Die Korandabbildung  $\delta : C^n(T) \rightarrow C^{n+1}(T)$  ist für  $c \in C^n(T)$  und  $\sigma \in S_{n+1}(T)$  definiert durch:

$$(\delta c)_\sigma := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c_{\mathcal{U}_i(\sigma)}$$

$(C^*(T), \delta)$  heißt **simplizialer Kokettenkomplex**.

### Satz 2.32 (Komplexeigenschaft)

Die Korandabbildung  $\delta$  erfüllt die Komplexeigenschaft. Es gilt also:

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Da  $C^n(T)$  ein Vektorraum und  $\delta$  eine lineare Abbildung ist, sind auch  $\text{Bild}(\delta)$  und  $\text{Kern}(\delta)$  jeweils ein Vektorraum. Die Komplexeigenschaft der Korandabbildung garantiert, dass außerdem gilt:

$$\text{Bild}(\delta) \subset \text{Kern}(\delta).$$

**Definition 2.33 (simpliciale Kohomologie)**

Sei  $T$  eine glatte Triangulierung, der Quotientvektorraum:

$$H_{simp}^k(T) := \frac{\text{Kern}(\delta : C^k T \rightarrow C^{k+1} T)}{\text{Bild}(\delta : C^{k-1} T \rightarrow C^k T)}$$

heißt die **k-te simpliciale Kohomologie** von  $T$ .

Die  $k$ -Koketten im Bild von  $\delta$  heißen  $k$ -dimensionale **Koränder**, die im Kern **Kozykel**.

**Bemerkung 2.34**

Die Komponenten von simplicialen  $k$ -Koketten sind Abbildungen, die jedem  $k$ -Simplex der Triangulierung eine reelle Zahl zuweisen.

### 3 Operator $I : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(T)$

In den vorangegangenen Kapiteln wurde auf zwei sehr unterschiedliche Weisen Kohomologien definiert. In den folgenden Kapiteln soll nun gezeigt werden, dass sie für eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit  $M$  mit beliebiger Triangulierung  $T$  mit lokaler Ordnung jeweils die gleichen Gruppen liefern. Als erstes soll jeder  $k$ -Form eine simpliziale Kokette zugeordnet werden. Durch die  $k$ -Form muss also jedem Simplex eine reelle Zahl zugewiesen werden. Jeder Simplex kann als Teilmenge in der Mannigfaltigkeit betrachtet werden, über die die  $k$ -Form integriert werden kann.

In den folgenden Kapiteln erweitere ich die Ideen von [6] und wende sie nicht auf simpliziale Mengen, sondern auf die Triangulierung direkt an.

Seien  $M$  eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit und  $T$  eine glatte Triangulierung von  $M$ .

#### 3.1 Definition $I$

##### Definition 3.1 ( $I$ )

Durch Integrieren erhält man den Operator  $I : \Omega^k(M) \rightarrow C^k(T)$ , wobei

$$I(\eta)_\sigma := \int_{\Delta^k} \sigma^* \eta \text{ für } \sigma \in S_k(T)$$

gilt.

$I$  ordnet jedem Simplex das Integral der  $k$ -Form über den Simplex zu.

##### Anschauung 3.2

Sei  $\eta := f$  eine 0-Form.

Dann sind  $\sigma^* f$  die Formen, die man durch „Abtasten“ der Triangulierung erhält.

Die Form  $f$  wird stückweise (Simplex für Simplex) zurückgezogen.

#### 3.2 Wohldefiniertheit von $I$

Da eine Form  $\eta$  auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert ist, ist sie auch für jeden Simplex der Triangulierung definiert. Da eine Differentialform stetig ist, ist sie auch integrierbar.

##### Bemerkung 3.3

Integriert man eine  $k$ -Form über eine  $p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist für  $k \neq p$  das Integral Null.

Deshalb ordnet  $I$   $k$ -Formen nur  $k$ -Koketten zu.

### 3.3 Kokettenabbildung $I d = \delta I$

**Lemma 3.4** (*I ist Kokettenabbildung*)

Es gilt  $d \circ I = \delta \circ I$ .

**Beweis:** Sei  $\eta \in \Omega^k(M)$ , und sei  $\tau \in C_{k+1}(T)$ .

$$\begin{aligned}
 I(d\eta)_\tau &= \int_{\Delta^{k+1}} \tau^*(d\eta) \\
 \text{Zurückziehen kommutiert mit d} &= \int_{\Delta^{k+1}} d(\tau^*\eta) \\
 \text{Stokes: } (\int_{\partial\Delta^{k+1}} \eta = \int_{\Delta^{k+1}} d\eta) &= \underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i}_{\text{unterschiedliche Orientierung}} \int_{\Delta^k} \underbrace{(\varepsilon^i)^*}_{\tau \text{ auf die Seite einschränken}} \tau^*\eta \\
 &\quad \text{Seiten-Simplices} \\
 \mathcal{U}_i(\tau) = (\varepsilon^i)^*\tau &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \int_{\Delta^k} (\mathcal{U}_i(\tau))^*\eta \\
 \text{Def : } I &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i I(\eta)_{\mathcal{U}_i(\tau)} \\
 &= \delta(I(\eta))_\tau.
 \end{aligned}$$

◇

## 4 Operator $E : C^*(T) \rightarrow \Omega^*(M)$

Nun soll einer simplizialen Kokette eine glatte Form zugeordnet werden. Auf den Ecken (den 0-Simplices) soll die Form den Wert der Ecke annehmen. Zwischen den Ecken soll sie durch alle umschließenden Seiten-Simplices beeinflusst werden, keine leichte Aufgabe. Die Lösung liefern auch hier die Teilung-der-Eins Funktionen. Zuerst definiere die Abbildung lokal für jeden Simplex, die Werte der Form zwischen den Ecken liefern die glatten Teilung-der-Eins Funktionen. Anschließend wird die Form auf der gesamte Mannigfaltigkeit zusammen gesetzt.

### 4.1 Notation

Sei  $0 \leq k \leq n$ .

$I_{0,k}$  ist ein aufsteigendes  $(k+1)$ -Tupel ganzer Zahlen zwischen 0 und  $n$ .

Also  $I_{0,k} = (i_0, \dots, i_k)$ , so dass gilt:  $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$ .

Durch  $I_{0,k}$  ist ein  $k$ -dimensionaler Seiten-Simplex von  $\Delta^n$  gegeben. Er ist definiert durch die Ecken  $e_{i_0}, \dots, e_{i_k}$ .

$\bar{I}_{0,k}$  ist das aufsteigende  $(n-k)$ -Tupel ganzer Zahlen zwischen 0 und  $n$ , das  $I_{0,k}$  vervollständigt,

also  $\bar{I}_{0,k} = (\bar{i}_0, \dots, \bar{i}_{n-k-1})$ , wobei gilt:

- $0 \leq \bar{i}_0 < \dots < \bar{i}_{n-k-1} \leq n$ .
- $I_{0,k} \cup \bar{I}_{0,k} = \{0, \dots, n\}$ .

$|I_{0,k}|$  Da  $I_{0,k}$  ein Simplex repräsentiert, soll  $|I_{0,k}|$  nicht wie üblich die Anzahl der Tupel  $(k+1)$  sein, sondern die Dimension dieses Simplex:

$$|I_{0,k}| := k$$

**Baryzentrische elementare Form  $\tilde{\omega}_{I_{0,k}}$ :** Auf einem  $n$ -Simplex ist sie definiert durch:

$$\tilde{\omega}_{I_{0,k}} := \sum_{s=0}^k (-1)^s t_{i_s} dt_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dt_{i_s}} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$$

Für  $I = \emptyset$  setze  $\omega_\emptyset := 0$ .

$\mathcal{U}_{I_{0,k}} : C_n(T) \rightarrow C_k(T)$  : ist die Abbildung definiert durch:

$$\mathcal{U}_{I_{0,k}} := \mathcal{U}_{i_0} \circ \dots \circ \mathcal{U}_{i_{n-k-1}}.$$

zur Erinnerung:  $\mathcal{U}_i(\sigma) := \sigma \circ \varepsilon^i$ , also ist  $\mathcal{U}_i$  die Abbildung auf das Seiten-Simplex ohne die Ecke  $e_i$ . Folglich ist  $\mathcal{U}_{I_{0,k}}$  die Einschränkung eines  $n$ -Simplices auf den  $k$  dimensionalen Seiten-Simplex mit den Ecken  $I_{0,k}$ .

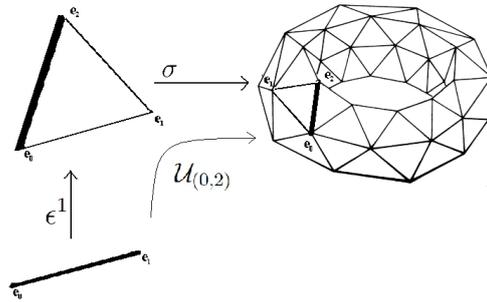


Abbildung 12:  $\mathcal{U}_{(0,2)}$ .

4.2 Definition  $\tilde{E}$

Einer simplizialen Kokette auf der Triangulierung soll eine Form zugeordnet werden. Sei  $c = (c_\sigma)$  eine  $k$ -Kokette (also  $c \in C^k(T)$  und  $\sigma \in S_n(T)$ ).

zur Erinnerung:  $I := I_{0,k} := \{i_0, \dots, i_k\}$   
mit  $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$ .

Betrachte zunächst den Fall, dass  $T$  nur aus einem Simplex  $\Delta$  besteht.

**Definition 4.1** ( $\tilde{E}(c)$ )

Definiere die Abbildung  $\tilde{E} : C^k(T) \rightarrow \Omega^k(\Delta^n)$  folgendermaßen:

$$\tilde{E}(c) := k! \sum_{|I|=k} \tilde{\omega}_I \cdot c_{\mathcal{U}_I(\Delta)}.$$

**Bemerkung 4.2**

Eine Form ist lokal definiert. Für jeden Punkt  $x$  in der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\Delta^n$  kann man seine baryzentrischen Koordinaten in Bezug auf den Simplex angeben:  $x = (x_0, \dots, x_n)$ .

Soll einer  $k$ -Kokette  $c$  (also einer Abbildung von den  $k$ -dimensionalen Seiten-Simplices in die reellen Zahlen) eine  $k$ -Form zugeordnet werden, so muss für jeden Punkt in der Mannigfaltigkeit (stetig) eine  $k$ -Form angegeben werden. Diese  $k$ -Form berechnet sich durch:

$$k! \cdot \sum_{\substack{\text{alle } k\text{-dimensionalen} \\ \text{Seiten-Simplices } I_{0,k} \text{ von } \Delta^n}} \sum_{s=0}^k \underbrace{t_{i_s} dt_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dt_{i_s}} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}}_{\text{baryzentrische Koordinaten von } x} \cdot \underbrace{c_{\mathcal{U}_I(\Delta)}}_{\text{Wert des Seiten-Simplex } I_{0,k}}.$$

**Bemerkung 4.3**

Besteht die Triangulierung aus mehr als einem Simplex, sind die baryzentrischen Koordinaten ungeeignet. Man könnte zwar für jeden  $n$ -Simplex  $\tau$  der Triangulierung

$$\tilde{E}(c) = k! \sum_{|I|=k} \omega_I \cdot c_{\mathcal{U}_I(\tau)} \text{ definieren,}$$

aber dann wäre die Form nur für jeden Simplex definiert und nicht auf der ganzen Mannigfaltigkeit.

Liegt der Punkt  $x$  im Inneren eines  $n$ -Simplex  $\tau$ , so ist die Form  $E(c) := \tilde{E}(c)_\tau$  eindeutig definiert. Liegt der Punkt jedoch auf einem Seiten-Simplex, dann ist nicht klar, welches der angrenzenden  $n$ -Simplices zur Definition der Form benutzt werden soll.

Wählt man nur einen der angrenzenden  $n$ -Simplices aus, so wäre die resultierende  $k$ -Form nicht stetig. Auch der Mittelwert aller angrenzenden  $n$ -Simplices liefert keine stetige Form.

**Bemerkung 4.4**

Ziel ist es,  $E(c)$  so zu verändern, dass auf einem Seiten-Simplex alle angrenzenden  $n$ -Simplices die gleiche Form liefern bzw. dass die Form auf einem Seiten-Simplex nur durch den Seiten-Simplex selbst bestimmt ist.

Dies ist erreicht, wenn die Normalen an dem Seiten-Simplex Null sind, da dann, falls ein Seiten-Simplex  $I_{0,k}$  den Eckpunkt  $e_i$  nicht berührt, auch  $\omega_{I_{0,k}}$  verschwindet,

$$\omega_{I_{0,k}} = \sum_{s=0}^k \underbrace{t_{i_s} dt_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dt_{i_s}} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}}_{\text{entweder } t_{i_s} = 0 \text{ oder } dt_{i_s} = 0} = 0.$$

Leider ist für die baryzentrischen Koordinaten auf dem Seiten-Simplex  $dt_i \neq 0$  (da  $t_i$  bis zum Rand linear ist).

Man könnte den Rand etwas erweitern.

Die erhaltende Form ist dann zwar stetig, aber leider nicht glatt.

### 4.3 offener Stern

#### Definition 4.5 (offener Stern)

Der **offene Stern** von Ecke  $e_i$  ist das Innere der Vereinigung aller angrenzenden Simplexes.

$$\text{Stern}(e_i) := \bigcup_{\sigma \ni e_i} \sigma$$

$$\text{offenerStern}(e_i) := \text{Innere}(\text{Stern}(e_i))$$

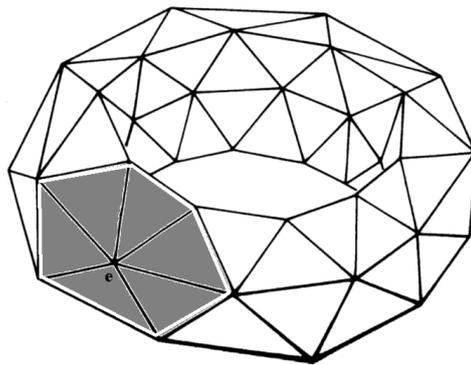


Abbildung 13: Offener Stern von e.

#### Bemerkung 4.6

Für jede offene Überdeckung gibt es eine „glatte Teilung-der-Eins“ (T1).

#### Korollar 4.7 (Eigenschaften der T1-Funktionen)

Wähle eine T1 für die offenen Sterne aller Ecken als Überdeckung von  $T$ . Sei  $\epsilon_i$  die T1-Funktion, die zum Eckpunkt  $e_i$  gehört.

Für jeden Punkt  $x$  in  $T$  gilt:

- Liegt  $x$  auf einem  $k$ -dimensionalen Seiten-Simplex, dann gilt:  
 $\sum_{i \in I} \epsilon_i(x) = 1$  und  $\sum_{i \in I} d\epsilon_i = 0$ ,  
 wobei  $I$  die Ecken des  $k$ -Simplexes bezeichnen soll.
- Nur die T1-Funktionen der Ecken, die den Punkt begrenzen, sind ungleich Null, da  $x$  nur im offenen Stern dieser Ecken liegt.
- Es gilt:  $\sum_{i \in I} \epsilon_i(x) = 1$ ,  
 wobei  $I$  die Ecken sind, die den Punkt begrenzen. Nur diese T1 Funktionen sind ungleich Null.
- Aus  $\epsilon_i(x) = 0$  folgt  $d\epsilon_i(x) = 0$ ,  
 da 0 Minimum der T1-Funktionen ist.

#### 4.4 Definition $E$

##### Definition 4.8 (Elementare Form $\omega_\sigma$ )

Seien  $\epsilon_i$  die T1-Funktionen für die offenen Sterne der Ecken der Triangulierung. Sei  $\sigma$  ein Simplex der Triangulierung mit angeordneten Ecken  $(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$ . Definiere die zu  $\sigma$  gehörige elementare Form durch

$$\omega_\sigma := \sum_{s=0}^k (-1)^s \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{\sigma_s}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}.$$

##### Bemerkung 4.9

Die elementare Form  $\omega_\sigma$  verschwindet am Rand von  $\sigma$ , da hier wenigstens eine T1-Funktion  $\epsilon_i$  trivial ist und in jedem Summand entweder  $\epsilon_i$  oder  $d\epsilon_i$  vorkommt.

##### Definition 4.10 ( $E$ )

Definiere die Abbildung  $E : C^k(T) \rightarrow \Omega^k(M)$  durch:

$$E(c) := k! \sum_{|\sigma|=k} \omega_\sigma \cdot c_\sigma.$$

Für jeden Punkt  $x$  verschwinden fast alle Summanden. Nur die T1-Funktionen der Ecken  $e_{i(x)}$ , die einen Simplex bilden in dessen Inneren der Punkt  $x$  liegt, verschwinden nicht. Da  $\omega_\sigma$  glatt ist, gilt dies auch für  $E(c)$ .

##### Bemerkung 4.11

Es gibt höchstens ein Simplex  $\tau$ , in dessen Inneren der Punkt  $x$  liegt. Um  $E(c)_x$  zu berechnen reicht es die  $k$ -dimensionalen Seiten-Simplices von  $\tau$  zu betrachten. Für  $x$  gilt:

$$E(c)_x = k! \sum_{\sigma \in S_k(\tau)} \omega_{\sigma x} \cdot c_\sigma.$$

## 4.5 Kokettenabbildung $dE = E\delta$

### Lemma 4.12 ( $d\omega_\sigma$ )

Es gilt  $d\omega_\sigma = (k+1)d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} d((-1)^s \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge \hat{d}\epsilon_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}) &= (-1)^s \cdot 1 \cdot d\epsilon_{\sigma_s} \wedge d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge \hat{d}\epsilon_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \\ &= (-1)^s \cdot (-1)^s d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \\ &= d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \end{aligned}$$

Also  $d\left(\sum_{s=0}^k (-1)^s \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge \hat{d}\epsilon_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}\right) = (k+1)d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}$ .

◇

### Satz 4.13 ( $E$ ist Koketten Abbildung)

Es gilt:  $E \circ \delta = d \circ E$ .

**Beweis:** Sei  $c \in C^k(T)$ . Für die rechte Seite gilt:

$$\begin{aligned} dE(c) &= d \left( k! \sum_{|\sigma|=k} \omega_\sigma \cdot c_\sigma \right) \\ &= k! \sum_{|\sigma|=k} d\omega_\sigma \cdot c_\sigma \\ &= k! \sum_{|\sigma|=k} (k+1)d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \cdot c_\sigma, \end{aligned}$$

für die andere Seite gilt:

$$\begin{aligned} E(\delta c) &= (k+1)! \sum_{|\rho|=k+1} \omega_\rho \cdot (\delta c)_\rho \\ &= (k+1)! \sum_{|\rho|=k+1} \omega_\rho \cdot \left( \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l c_{\mathcal{U}_l(\rho)} \right). \end{aligned}$$

**Erinnerung:**  $\mathcal{U}_l(\rho)$  ist der  $k$ -dimensionale Seiten-Simplex von  $\rho$ , den man durch Weglassen der Ecke  $e_l$  erhält.

**Koeffizienten von  $c_\sigma$ :** Es reicht für jeden Summanden die Gleichheit zu zeigen. Betrachte also die Koeffizienten von  $c_\sigma$  genauer.

Auf der linken Seite kommt  $c_\sigma$  genau dann vor, wenn  $\sigma$  ein Seiten-Simplex von  $\rho$  ist. Also wenn für ein  $\rho$  gilt:  $\mathcal{U}_{l_\rho}(\rho) = \sigma$ . Dabei steht  $l_\rho$  für die Ecke  $e_{l_\rho}$ , die nicht in  $\sigma$  vorkommt.

Mit der Bemerkung 4.11 müssen für einen Punkt  $x$ , der im Inneren eines Simplex  $\tau$  liegt, nur solche  $\rho$  betrachtet werden, die Seiten-Simplex von  $\tau$  sind.

Ist  $\rho$  ein  $(k+1)$ -Seiten-Simplex, so dass  $\sigma$  ein Seiten-Simplex von  $\rho$  ist, dann bezeichne ich die sortierten Ecken von  $\rho$  als  $I_\rho := (\sigma_0, \dots, \sigma_{l_\rho-1}, \rho_{l_\rho}, \sigma_{l_\rho}, \dots, \sigma_k)$ .

Berechne den Koeffizienten zu  $c_\sigma$ , bis auf den Faktor  $(k+1)!$ :

**Erinnerung:** In jedem Simplex  $\tau$  gilt:  $\sum_{\lambda=0}^{|\tau|} d\epsilon_{\tau_\lambda} = 0$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{|\rho|=k+1 \\ S_k(\rho) \ni \sigma}} \omega_\rho \cdot (-1)^{l_\rho} \\
= & \sum_{I_\rho} \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \epsilon_{i_s} \underbrace{d\epsilon_{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\epsilon_{i_s}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{i_k}}_{\text{Erinnerung: } i_{l_\rho} = \rho_{l_\rho}, \text{ sonst } i_j = \sigma_j} \cdot (-1)^{l_\rho} \\
= & \sum_{I_\rho} \left[ \sum_{s=0}^{l_\rho-1} (-1)^{s+l_\rho} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge \underbrace{\widehat{d\epsilon_{\sigma_s}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho-1}} \wedge d\epsilon_{\rho_{l_\rho}}}_{(l_\rho-1-s)\text{Stellen}} \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{(-1)^{l_\rho+l_\rho} \epsilon_{\rho_{l_\rho}}}_{s=l_\rho} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho-1}} \wedge \widehat{d\epsilon_{\rho_{l_\rho}}} \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{s=l_\rho}^k (-1)^{s+l_\rho+1} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho-1}} \wedge \underbrace{d\epsilon_{\rho_{l_\rho}} \wedge d\epsilon_{\sigma_{l_\rho}} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\epsilon_{\sigma_s}}}_{(s-l_\rho)\text{Stellen}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right] \\
= & \sum_{I_\rho} \left[ \sum_{s=0}^k (-1)^1 \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{s-1}} \wedge [d\epsilon_{\rho_{l_\rho}}] \wedge d\epsilon_{\sigma_{s+1}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \epsilon_{\rho_{l_\rho}} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right] \\
= & \sum_{s=0}^k -\epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{s-1}} \wedge \left[ \sum_{I_\rho} d\epsilon_{\rho_\lambda} \right] \wedge d\epsilon_{\sigma_{s+1}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{I_\rho} \epsilon_{\rho_{l_\rho}} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \\
= & \sum_{s=0}^k -\epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{s-1}} \wedge \left[ -\sum_{\lambda=0}^k d\epsilon_{\sigma_\lambda} \right] \wedge d\epsilon_{\sigma_{s+1}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{I_\rho} \epsilon_{\rho_{l_\rho}} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \\
= & \sum_{s=0}^k \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_{s-1}} \wedge [d\epsilon_{\sigma_s}] \wedge d\epsilon_{\sigma_{s+1}} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{I_\rho} \epsilon_{\rho_{l_\rho}} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \\
= & \left[ \underbrace{\sum_{s=0}^k \epsilon_{\sigma_s} + \sum_{I_\rho} \epsilon_{\rho_{l_\rho}}}_{=1} \right] \cdot d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} = d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}.
\end{aligned}$$

◇

## 5 Whitney-Satz: $H^*(\Omega(M)) \cong H(C^*(T))$

Die Gleichheit der Kohomologien kann entweder abstrakt begründet werden, oder man gibt einen Isomorphismus an. Von der Abbildung  $I$  kann man sogar für die Ketten zeigen, dass sie surjektiv ist. Die Injektivität von  $I$  kann für die Ketten nicht gelten, da zwei unterschiedliche Formen auf einem Simplex das gleiche Integral haben können. Um zu beweisen, dass zwei solche Formen immer in der selben Kohomologie-Klasse liegen, reicht es zu zeigen, dass  $I$  auf den Ketten bis auf einen Rest injektiv ist und dieser Rest in  $\text{Bild}(d)$  liegt.

### 5.1 Whitney-Satz

#### Satz 5.1 (Whitney)

Die Kokettenabbildung  $I : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(T)$  induziert einen Isomorphismus auf den zugehörigen Kohomologien.

**Genauer:** Es gibt eine Kokettenabbildung

$$E : C^*(T) \rightarrow \Omega^*(M)$$

und eine Kettenhomotopie

$$\tilde{h}_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M) \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0$$

so dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$I \circ E = \text{id}$$

$$(E \circ I) = \text{id} + \tilde{h}_k$$

Also  $H(\Omega^*(M)) \cong H(C^*(T))$ .

### 5.2 $I$ ist surjektiv: $I \circ E = \text{id}$

Die Surjektivität für die Ketten kann nachgerechnet werden. Die Rechnung benutzt mehrmals die Eigenschaft der T1-Funktionen ( $\sum \epsilon_i = 1$  und  $\sum d\epsilon_i = 0$ ) und die Eigenschaft, dass das Integral von  $d\epsilon_I$  auf jedem Simplex für jede T1 gleich ist.

### 5.3 Rechenregeln für $\int d\epsilon_I$

#### Lemma 5.2

Sei  $r \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $\int_{\Delta^n} \epsilon_0^r d\epsilon_0 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{n-1} = \frac{(-1)^{nr} r!}{(n+r)!}$

**Beweis:** durch Induktion:

Sei  $Z_n(r) := \int_{\Delta^n} \epsilon_0^r d\epsilon_0 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{n-1}$ .

**Behauptung:**  $Z_n(r) \stackrel{!}{=} \frac{(-1)^n r!}{(n+r)!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsanfang:**  $Z_1(r) = \int_0^1 \epsilon_0^r d\epsilon_0 = \left[ \frac{\epsilon_0^{r+1}}{r+1} \right]_0^1 = \frac{-1}{r+1}$

**Induktionsannahme:** Es gilt  $Z_k(r) = \frac{(-1)^k r!}{(k+r)!}$  für alle  $k \leq n$ .

**Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$ :** Es gilt:

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(r) &= \int_{\Delta^{n+1}} \epsilon_0^r d\epsilon_0 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n \\ \text{Stokes} &= \int_{\partial\Delta^{n+1}} \iota^* \frac{\epsilon_0^{r+1}}{r+1} d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n \end{aligned}$$

Für jeden Seiten-Simplex, der der Ecke  $e_i$  (für  $i = 0, \dots, n$ ) gegenüberliegt, ist das Integral gleich Null, da  $\epsilon_0 = 0$  bzw.  $d\epsilon_i = 0$  ist. Nur für den Seiten-Simplex, der der Ecke  $e_{n+1}$  gegenüberliegt, ist das Integral ungleich Null. Auf diesem Seiten-Simplex gilt  $\sum_{\lambda=0}^n \epsilon_\lambda + \underbrace{0}_{=\epsilon_{n+1}} = 1$ . Daher folgt mit der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(r) &= \int_{\Delta^n} \underbrace{\epsilon_0^{n+1}}_{\text{Orientierung ändert sich um } (-1)^{n+1}} \frac{\epsilon_0^{r+1}}{r+1} d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{d\epsilon_n}_{=-\sum_{i=0}^{n-1} d\epsilon_i} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{r+1} \int_{\Delta^n} \epsilon_0^{r+1} \underbrace{d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge (-d\epsilon_0)}_{n-1 \text{ mal tauschen}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{r+1} \int_{\Delta^n} \epsilon_0^{r+1} d\epsilon_0 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{n-1} \\ &= \frac{-1}{r+1} \cdot Z_n(r+1). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} Z_n(r) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(r+1) \cdot (r+2) \cdot \dots \cdot (r+n-1)} \cdot Z_1(r+n-1) \\ &= \frac{(-1)^n r!}{(r+n-1)! \cdot (r+n)} = \frac{(-1)^n r!}{(r+n)!} \end{aligned}$$

◇

**Korollar 5.3** ( $\int T1$ )

Seien  $\epsilon_0 \dots \epsilon_n$  die T1-Funktionen zu den Eckpunkten  $e_0, \dots, e_n$  des  $n$ -Simplex  $\Delta^n$ . Dann gelten:

1.  $\int_{\Delta^n} d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n = \frac{1}{n!}$ ,
2.  $\int_{\Delta^n} \epsilon_0 d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n = \frac{1}{(n+1)!}$ ,
3.  $\int_{\Delta^n} \epsilon_x d\epsilon_{x+1} \wedge \dots \wedge d\epsilon_n \wedge d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{x-1} = \frac{1}{(n+1)!}$  für  $x = 0, \dots, n$ .

**Beweis:****1:**

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^n} d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n &= \int_{\Delta^n} d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{d\epsilon_n}_{=-\sum_{\lambda=0}^{n-1} d\epsilon_\lambda} = (-1) \int_{\Delta^n} \underbrace{d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_0}_{(n-1) \text{ mal tauschen}} \\ &= (-1)^n Z_n(0) = (-1)^n \frac{(-1)^{n0!}}{(0+n-1+1)!} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

**2:**

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^n} \epsilon_0 d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_n &= \int_{\Delta^n} \epsilon_0 d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{d\epsilon_n}_{=-\sum_{\lambda=0}^{n-1} d\epsilon_\lambda} = (-1) \int_{\Delta^n} \epsilon_0 \underbrace{d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_0}_{(n-1) \text{ mal tauschen}} \\ &= (-1)^n Z_n(1) = (-1)^n \frac{(-1)^{n1!}}{(1+n-1+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

**3:** Sei  $U_1 : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  eine  $\frac{1}{n}$ -Drehung des Simplex  $\Delta^n$ . Also ist  $U_1$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, der die Ecke  $e_i$  auf die Ecke  $e_{i-1}$  (bzw.  $e_0$  auf  $e_n$ ) abbildet.

Sei  $U_k := \underbrace{U_1 \circ \dots \circ U_1}_{k \text{ mal}}$ .

Dann gilt für jedes  $x = 0, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta^n} \epsilon_x d\epsilon_{x+1} \wedge \dots \wedge d\epsilon_n \wedge d\epsilon_0 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{x-1} \\ &= \int_{\Delta^n} U_x \epsilon_x dU_x \epsilon_{x+1} \wedge \dots \wedge dU_x \epsilon_n \wedge dU_x \epsilon_0 \wedge \dots \wedge dU_x \epsilon_{x-1} \\ &= \int_{\Delta^n} \epsilon_0 d\epsilon_1 \wedge \dots \wedge d\epsilon_{n-x} \wedge d\epsilon_{n-x+1} \wedge \dots \wedge d\epsilon_n \\ \text{nach 2:} &= \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

◇

**Satz 5.4 (I ist surjektiv)**

Es gilt  $I \circ E = \text{id}$ , also ist  $I$  surjektiv und  $E$  injektiv.

**Beweis:** Sei  $c \in C^k(T)$ . Es reicht zu zeigen:  $I(E(c)) \stackrel{!}{=} c$ .

$$\begin{aligned}
E(c) &= k! \sum_{|\sigma|=k} \omega_\sigma c_\sigma \\
&= k! \sum_{|\sigma|=k} \left( \sum_{s=0}^k (-1)^s \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right) \cdot c_\sigma \\
&\quad \text{Für Formen auf einem } k\text{-dimensionalen Simplex } \sigma \text{ gilt} \\
&= k! \sum_{s=0}^k (-1)^s \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \cdot c_\sigma \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot \left[ (-1)^0 \epsilon_{\sigma_0} d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{s=1}^k (-1)^s \epsilon_{\sigma_s} \underbrace{d\epsilon_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}}_{=-\sum_{\lambda=1}^k d\epsilon_{\sigma_\lambda}} \right] \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot \left[ \epsilon_{\sigma_0} d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{s,\lambda=1}^k (-1)^{s+1} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_\lambda} \wedge d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right] \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot \left[ \epsilon_{\sigma_0} d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{\substack{s,\lambda=1 \\ s=\lambda}}^k (-1)^{s+1} \epsilon_{\sigma_s} \underbrace{d\epsilon_{\sigma_\lambda} \wedge d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}}_{s-1 \text{ mal tauschen}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{s,\lambda=1 \\ s \neq \lambda}}^k (-1)^{s+1} \epsilon_{\sigma_s} \underbrace{d\epsilon_{\sigma_\lambda} \wedge d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\hat{\epsilon}_{\sigma_s} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}}_{=0, \text{ da } d\epsilon_{\sigma_\lambda} \text{ zweimal vorkommt}} \right] \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot \left[ \epsilon_0 d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} + \sum_{s=1}^k (-1)^{(s+1)(s-1)} \epsilon_{\sigma_s} \wedge d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k} \right] \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot \underbrace{\sum_{s=0}^k \epsilon_{\sigma_s} \wedge d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}}_{=1} \\
&= k! \cdot c_\sigma \cdot d\epsilon_{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge d\epsilon_{\sigma_k}
\end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
I(E(c)) &= \int_{\Delta^k} E(c) = \int_{\Delta^k} k! \cdot c_\sigma \cdot d\epsilon_1 \wedge \cdots \wedge d\epsilon_k = k! \cdot c_\sigma \underbrace{\int_{\Delta^k} d\epsilon_1 \wedge \cdots \wedge d\epsilon_k}_{=\frac{1}{k!}} \\
&= c
\end{aligned}$$

◇

## 5.4 Kettenhomotopie $\tilde{h}$

Die Kettenhomotopie muss einer Form  $\eta$  eine Form aus  $Bild(d)$  zuweisen, sie ist also abhängig von  $d$ . Auf den Eckpunkten der Triangulierung soll die neue Form verschwinden. Sie ist also auch abhängig von der Triangulierung. Der klassische Beweis [19] zeigte, dass es diese Kettenhomotopie geben muss. In diesem Kapitel soll sie lokal auf  $M$  definiert werden. Ohne die lokale Definition machte es sehr viel mehr Mühe den klassischen Beweis auf den  $L^2$ -Fall zu übertragen, siehe [4].

Um die Eigenschaften von  $d$  nutzen zu können und trotzdem nicht den Grad der Form zu erhöhen, benutze ich den Prismaoperator  $\mathcal{P}$ , der vom Poincaré-Lemma bekannt ist [8]. Die elementare Form  $\omega$  soll dazu dienen, die Triangulierungseigenschaften einzuarbeiten.

## 5.5 $\mathcal{P}$ auf $\Delta^n$

Der Standard-Simplex  $\Delta^n$  ist sternzusammenziehbar in Bezug auf jeden Eckpunkt  $e_i$ . Es existiert also eine Homotopie  $h_i : [0, 1] \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ , so dass gilt  $h_i(1, \bullet) = e_i$  und  $h_i(0, \bullet) = id$ .

Ein Punkt  $x$  in  $\Delta^n$  kann mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten  $(t_0, \dots, t_n) = x$  beschrieben werden. Eine Sternzusammenziehung von  $\Delta^n$  auf  $e_i$  in diesen Koordinaten ist die baryzentrische Sternzusammenziehung  $\tilde{h}_i(t, x) := te_i + (1 - t)x$ .

Betrachte nun die Zurückziehung  $h^*\eta$  einer Form  $\eta \in \Omega^k(\Delta^n)$  auf  $\Omega^k([0, 1] \times \Delta^n)$ . Sie lässt sich zerlegen in

$$h^*\eta = dt \wedge \alpha + \beta,$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Formen sind, in denen kein  $dt$ -Anteil vorkommt und  $t \in [0, 1]$ . Es kommen also nur  $dt_0, \dots, dt_n$  vor. (Achtung:  $\alpha$  und  $\beta$  sind unabhängig von  $dt$ , aber sie können von  $t$  abhängen.)

**Erinnerung:** Seien  $v$  ein Vektor und  $\theta$  eine  $k$ -Form.

Dann ist  $(v \lrcorner \theta)(x^2, \dots, x^k) := \eta(v, x^2, \dots, x^k)$ .

Also ist  $(v \lrcorner \theta)$  eine  $(k - 1)$ -Form.

### Definition 5.5 ( $\tilde{\mathcal{P}}$ )

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Der Prismaoperator  $\tilde{\mathcal{P}} : \Omega^k([0, 1] \times M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  ist definiert durch:

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta) = \int_{t=0}^1 (\partial_t \lrcorner \theta) dt.$$

### Definition 5.6 ( $\mathcal{P}_i$ )

Sei  $h_i$  eine Sternzusammenziehung von  $\Delta^n$  auf  $e_i$ , dann ist  $\mathcal{P}_i : \Omega^k(\Delta^n) \rightarrow \Omega^{k-1}(\Delta^n)$  definiert durch:

$$\mathcal{P}_i := \tilde{\mathcal{P}}h_i^*.$$

**Bemerkung 5.7**

Da  $h^*\eta = dt \wedge \alpha + \beta$  ist, gilt

$$\mathcal{P}_i = \int_{t=0}^1 \alpha,$$

wobei die Koeffizienten von  $\alpha$  bezüglich  $t$  integriert werden.

**5.6 Eigenschaften von  $\mathcal{P}$** **Lemma 5.8**

$\mathcal{P}_i$  ist linear.

**Beweis:** Seien  $\eta, \tilde{\eta}$  jeweils  $k$ -Formen, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\eta + \tilde{\eta}) &= \tilde{\mathcal{P}}h^*(\eta + \tilde{\eta}) \\ \text{zurückziehen ist linear} &= \tilde{\mathcal{P}}(h^*(\eta) + h^*(\tilde{\eta})) = \tilde{\mathcal{P}}(dt \wedge \alpha + \beta + dt \wedge \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \\ &= \int_{t=0}^1 (\alpha + \tilde{\alpha}) = \int_{t=0}^1 \alpha + \int_{t=0}^1 \tilde{\alpha} = \mathcal{P}(\eta) + \mathcal{P}(\tilde{\eta}). \end{aligned}$$

Sei  $\eta$  eine  $k$ -Form und  $r \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(r\eta) &= \tilde{\mathcal{P}}h^*(r\eta) = \tilde{\mathcal{P}}r h^*(\eta) = \tilde{\mathcal{P}}r(dt \wedge \alpha + \beta) \\ &= \int_{t=0}^1 r\alpha = r \int_{t=0}^1 \alpha = r\mathcal{P}(\eta). \end{aligned}$$

◇

**Lemma 5.9 ( $\mathcal{P}_i(d)$ )**

Sei  $\eta$  eine  $k$ -Form, dann gilt:

$$\mathcal{P}_i(d\eta) = -\eta - d\mathcal{P}_i(\eta) \quad \text{für } k \geq 1$$

und

$$\mathcal{P}_i(d\eta) = \eta(e_i) - \eta \quad \text{für } k = 0.$$

**Beweis:** Bezeichne  $d_\Delta$  das äußere Differential in Richtung des Simplex. Es gilt:

$$h_i^*(d\eta) \stackrel{\text{zurückziehen}}{\underset{\text{kommutiert mit } d}{=}} dh_i^*(\eta) = d(dt \wedge \alpha + \beta) = \underbrace{d dt}_{=0} \wedge \alpha - dt \wedge d\alpha + \underbrace{d\beta}_{=dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \beta + d_\Delta \beta}.$$

Also ergibt sich:

$$\mathcal{P}_i(d\eta) = \int_{t=0}^1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \beta - d\alpha \right) = \underbrace{\beta|_{1 \times \Delta^n}}_{=0 \text{ für } k \geq 1, =\eta(e_i) \text{ für } k=0, \text{ da } h_i(1, \bullet) = e_i} - \underbrace{\beta|_{0 \times \Delta^n}}_{=\eta, \text{ da } h_i(0, \bullet) = id} - d \underbrace{\int_{t=0}^1 \alpha}_{\mathcal{P}_i(\eta)}.$$

Da für  $\eta \in \Omega^0$  gilt  $\mathcal{P}_i(\eta) = 0$ , folgt die Behauptung.

◇

**Definition 5.10** ( $\mathcal{P}_I$ )

Sei  $I = (i_0, \dots, i_{|I|})$  ein aufsteigend sortiertes Tupel mit Einträgen natürlicher Zahlen zwischen 0 und  $n$ .  $I$  soll den Seiten-Simplex von  $\Delta^n$  mit Ecken  $e_{i_0}, \dots, e_{i_{|I|}}$  repräsentieren. Für  $k > |I|$  ist  $\mathcal{P}_I : \Omega^k(\Delta^n) \rightarrow \Omega^{k-(|I|+1)}(\Delta^n)$  definiert durch

$$\mathcal{P}_I := \mathcal{P}_{i_{|I|}} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{i_0}.$$

**Lemma 5.11** ( $\mathcal{P}_I(d)$ )

Sei  $I$  ein Seiten-Simplex von  $\Delta^n$  und sei  $\eta$  eine  $k$ -Form, mit  $k > |I|$  dann gilt:

$$\mathcal{P}_I(d\eta) = - \sum_{s=0}^{|I|} (-1)^s \mathcal{P}_{(i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_{|I|})}(\eta) + (-1)^{|I|+1} d\mathcal{P}_I(\eta)$$

**Beweis:** durch Induktion

**Induktionsanfang:** Sei  $I = (i_0, i_1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I(d\eta) &= \mathcal{P}_{i_1}(\mathcal{P}_{i_0}(d\eta)) = \mathcal{P}_{i_1}(-\eta - d\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) = -\mathcal{P}_{i_1}(\eta) - \mathcal{P}_{i_1}(d\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \\ &= -\mathcal{P}_{i_1}(\eta) - (-\mathcal{P}_{i_0}(\eta) - d\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \\ &= \underbrace{-\mathcal{P}_{i_1}(\eta) + \mathcal{P}_{i_0}(\eta)}_{= -\sum_{s=0}^{|I|} (-1)^s \mathcal{P}_{(i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_{|I|})}(\eta)} + \underbrace{d\mathcal{P}_{i_1}\mathcal{P}_{i_0}(\eta)}_{= (-1)^{|I|+1} d\mathcal{P}_I(\eta)}. \end{aligned}$$

**Induktionsannahme:** Für  $|I| = n$  gilt:

$$\mathcal{P}_I(d\eta) = - \sum_{s=0}^{|I|} (-1)^s \mathcal{P}_{(i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_{|I|})}(\eta) + (-1)^{|I|+1} d\mathcal{P}_I(\eta)$$

**Induktionsschritt:**  $n \rightarrow n+1$ . Sei  $|I| = n+1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I(d\eta) &= \mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})} \mathcal{P}_{i_0}(d\eta) = \mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(-\eta - d\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \\ &= -\mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(\eta) - \mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(d\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \\ &= -\mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(\eta) - \\ \text{Induktionsannahme} &\quad \left( - \sum_{s=0}^n (-1)^s \mathcal{P}_{(i_1, \dots, \hat{i}_{s+1}, \dots, i_{n+1})}(\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) + (-1)^{n+1} d\mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \right) \\ &= - \left( \mathcal{P}_{(i_1, \dots, i_{n+1})}(\eta) + \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s \mathcal{P}_{(i_1, \dots, \hat{i}_{s+1}, \dots, i_{n+1})}(\mathcal{P}_{i_0}(\eta)) \right) \\ &\quad + (-1)^{n+2} d\mathcal{P}_I(\eta) \\ &= - \sum_{s=0}^{|I|} (-1)^s \mathcal{P}_{(i_0, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_{|I|})}(\eta) + (-1)^{|I|+1} d\mathcal{P}_I(\eta). \end{aligned}$$

◇

**Satz 5.12** ( $\int_{\Delta^k} \eta$ )

Sei  $\eta \in \Omega^k(\Delta^k)$ , und sei  $\mathcal{P}$  definiert durch die baryzentrische Sternzusammenziehung  $\tilde{h}_i : [0, 1] \times \Delta^k \rightarrow \Delta^k$ , dann gilt:

$$(-1)^k \int_{\Delta^k} \eta = \mathcal{P}_{(k-1)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{(0)}(\eta)(e_k).$$

**Beweis: 1. Schritt:**

Sei  $x = (x_0, \dots, x_k) \in \Delta^k$ .

Sei  $pr_i : \Delta^k \rightarrow [0, 1]$ , für  $i = 0, \dots, k$  die Projektion auf die  $i$ -te Koordinate.

Auf dem Simplex gilt:  $dx_0 = -\sum_{j=1}^k dx_j$ , daher lässt sich  $\eta$  schreiben als:

$$\eta_x = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Sei  $h_i : [0, 1] \times \Delta^k \rightarrow \Delta^k$  die Sternzusammenziehung auf den Eckpunkt  $e_i$ . Die Zurückziehung ist dann:

$$h_0^* \eta_{t_0, x} = f(h_0(t_0, x)) d(pr_0 \circ h_0(t_0, x)) \wedge \dots \wedge d(pr_{k-1} \circ h_0(t_0, x))$$

Definiere die Komposition:

$$H : [0, 1]^k \times \Delta^k \xrightarrow{\text{id}^{k-1} \times h_0} [0, 1]^{k-1} \times \Delta^k \xrightarrow{\text{id}^{k-2} \times h_1} \dots \xrightarrow{h_{k-1}} \Delta^k.$$

Setze  $H_i := pr_i \circ H$ . Berechne die Zurückziehung der Komposition:

$$H^* \eta_{(t_0, \dots, t_{k-1}, x)} = f(H(t_0, \dots, t_{k-1}, x)) dH_0(t_0, \dots, t_{k-1}, x) \wedge \dots \wedge dH_{k-1}(t_0, \dots, t_{k-1}, x).$$

Für  $dH_i$  gilt:

$$dH_i = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial H_i}{\partial t_j} dt_j + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} dx_j}_{\substack{\text{Diese Summanden fallen beim} \\ \text{Einsetzen von } \partial t_{k-1} \lrcorner \dots \lrcorner \partial t_0 \text{ weg}}}$$

Nun setze ein:

$$\begin{aligned} & (\partial t_{k-1} \lrcorner (\dots (\partial t_0 \lrcorner H^* \eta))) \\ &= f(H) \left( \partial t_{k-1} \lrcorner (\dots (\partial t_0 \lrcorner \sum_{\substack{\text{Permutation } \pi \\ \text{auf } (0, \dots, k-1)}} \frac{\partial H_0}{\partial t_{\pi(0)}} \dots \frac{\partial H_{k-1}}{\partial t_{\pi(k-1)}} dt_{\pi(0)} \wedge \dots \wedge dt_{\pi(k-1)})) \right) \\ &= f(H) \left( \partial t_{k-1} \lrcorner (\dots (\partial t_0 \lrcorner \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \frac{\partial H_0}{\partial t_{\pi(0)}} \dots \frac{\partial H_{k-1}}{\partial t_{\pi(k-1)}} dt_0 \wedge \dots \wedge dt_{k-1})) \right) \\ &= f(H) \det \left( \frac{\partial H_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=0}^{k-1} \end{aligned}$$

2.Schritt: Um die Transformationsformel benutzen zu können, muss sichergestellt werden, dass  $H(t, x)$  für den Punkt  $x = e_k$  ein Diffeomorphismus  $I^n \rightarrow U \cong \Delta^n$  ist.

$$\begin{aligned} H(t_{k-1}, \dots, t_0, x) &= h_{k-1}(\dots(h_1(h_0(t_0, x)))) = h_{k-1}(\dots(h_1(t_0 e_0 + x(1-t_0)))) \\ &= t_0 e_0 \prod_{j=1}^{k-1} (1-t_j) + \dots + t_{k-2} e_{k-2} \prod_{j=k-1}^{k-1} (1-t_j) + t_{k-1} e_{k-1} \\ &\quad + x \prod_{j=0}^{k-1} (1-t_j) \end{aligned}$$

Also ist  $H$  ein Polynom, also stetig und differenzierbar.

Für die Stelle  $x = e_k$  verschwinden die Koeffizienten von  $e_i$  mit  $i = 0 \dots k-1$  genau dann, wenn  $t_i = 0$  oder wenn  $t_j = 1$  (für  $j > i$ ) ist. Nur der Rand von  $I$  wird auf den Rand von  $\Delta^n$  abgebildet.

Die Umkehrabbildung an der Stelle  $x = e_k$  ist:

$$H^{-1}|_{e_k}(b_0, \dots, b_k) = \left( \frac{b_0}{(1-b_{k-1}) \cdot (1-\frac{b_{k-2}}{1-b_{k-1}}) \dots (1-\frac{b_1}{(1-b_{k-1}) \cdot (1-\frac{b_{k-2}}{1-b_{k-1}}) \dots})}, \dots, (\frac{b_{k-2}}{1-b_{k-1}}), b_{k-1} \right)$$

Da der Rand von  $\Delta^n$  eine Nullmenge ist, reicht es, dass  $H|_{e_k}$  auf dem Inneren ein Diffeomorphismus ist. Hier ist das Polynom  $H^{-1}|_{e_k}$  definiert. Also ist  $H|_{e_k}$  ein Diffeomorphismus auf dem Inneren.

Berechne nun das Vorzeichen der Determinante der Jacobi-Matrix an der Stelle  $e_k$ :

$$\left( \frac{\partial H_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=0}^{k-1} = \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^{k-1} (1-t_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -t_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{k-1} (1-t_j) & \prod_{j=2}^{k-1} (1-t_j) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \prod_{j=k-1}^{k-1} (1-t_j) & 0 \\ -t_0 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k-1}}^{k-1} (1-t_j) & \dots & -t_{k-2} \prod_{\substack{j=k-2 \\ j \neq k-1}}^{k-1} (1-t_j) & -t_{k-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Auf der Diagonalen stehen nur positive Werte, also ist  $\det \left( \frac{\partial H_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=0}^{k-1}$  positiv.

3.Schritt: Berechne die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_{(k-1)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{(0)}(\eta)(e_k) \\
= & \mathcal{P}_{(k-1)} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{(1)} \left( \int_{t_0=0}^1 \partial t_0 \lrcorner h_0^* \eta \, dt_0 \right) (e_k) \\
= & \int_{t_{k-1}=0}^1 \left( \partial t_{k-1} \lrcorner h_{k-1}^* \dots \int_{t_0=0}^1 (\partial t_0 \lrcorner h_0^* \eta) \, dt_0 \dots \right) dt_{k-1}(e_k) \\
= & \int_{t_{k-1}=0}^1 \dots \int_{t_0=0}^1 (\partial t_{k-1} (\lrcorner \dots (\partial t_0 \lrcorner H^*(\eta)))) \, dt_0 \dots dt_{k-1}(e_k) \\
= & \int_{[0,1]^k} \left( f(H(\cdot, e_k)) \cdot \det \left( \frac{\partial H_i(\cdot, e_k)}{\partial t_j} \right)_{i,j=0}^{k-1} \cdot 1 \right) dt_0 \dots dt_{k-1} \\
\stackrel{\text{Transformationsformel}}{=} & \int_{\overset{\circ}{U}} f(x) d_{t_0} \dots d_{t_{k-1}} = \int_{\Delta^k} (-1)^k f(x) d_{x_1} \wedge \dots \wedge d_{x_k} = (-1)^k \int_{\Delta^k} \eta
\end{aligned}$$

◇

### Bemerkung 5.13

Der Beweis nutzt, dass die Hintereinanderausführung der Sternzusammenziehungen ein Diffeomorphismus auf dem Inneren ist. Das gilt nicht nur für die baryzentrische Sternzusammenziehungen, sondern für jede Sternzusammenziehung  $h_k$  auf  $\Delta^n$  mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung auf jeden Seiten-Simplex  $\sigma$  von  $\Delta^n$  mit  $e_k \in \sigma$ , wieder eine Sternzusammenziehung ist,

## 5.7 $\mathcal{P}$ auf $M$

Nun soll der Operator  $\mathcal{P}$  auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert werden. Im ersten Schritt wurde  $\mathcal{P}$  für jeden Simplex definiert (siehe 5.5). Als nächstes zeige ich, dass  $\mathcal{P}$  für zwei aneinander grenzende  $n$ -Simplices auf dem gemeinsamen Rand gleich ist.

Sei  $e_i$  eine beliebige Ecke in der Triangulierung. Die Triangulierung sei so fein gewählt<sup>4</sup>, dass der Stern von  $e_i$  ganz in einer Karte der Mannigfaltigkeit liegt.

Auch der Stern ist sternzusammenziehbar, daher gibt es eine Sternzusammenziehung  $h_i$  von  $\text{Stern}(e_i)$  auf  $e_i$ .

Da  $\tilde{\mathcal{P}}$  für Mannigfaltigkeiten definiert war, kann man die Definition von  $\mathcal{P}_i$  zur folgenden erweitern:

### Definition 5.14 ( $\mathcal{P}_i$ )

Sei  $h_i$  eine Sternzusammenziehung von  $\text{Stern}(e_i)$  auf  $e_i$ , dann ist:

$$\mathcal{P}_i : \Omega^k(\text{Stern}(e_i)) \rightarrow \Omega^{k-1}(\text{Stern}(e_i))$$

definiert durch:

$$\mathcal{P}_i := \tilde{\mathcal{P}}h_i^*.$$

## 5.8 Formen-Verringerungsabbildung $v_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$

### Definition 5.15

Für einen  $k$ -dimensionalen Seiten-Simplex  $\sigma$  von  $\Delta^n$  mit angeordneten Ecken  $(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$  definiere den Prismaoperator:  $\mathcal{P} : \Omega^k(\Delta^n) \rightarrow \Omega^0(\Delta^n)$  durch:

$$\mathcal{P}_\sigma := \mathcal{P}_{\sigma_k} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{\sigma_0}.$$

### Definition 5.16

Sei  $\eta \in \Omega^k(M)$ . Definiere:

$$v_k(\eta) := \sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma(\eta),$$

Nach der Definition der elementaren Form  $\omega_\sigma$  verschwinden an einem Punkt  $x$  fast alle Summanden. Nur die Terme der Seiten-Simplices von einem Simplex, in dessen Inneren der Punkt  $x$  liegt, bleiben übrig. Hier ist der Prismaoperator definiert.

---

<sup>4</sup>Die simpliziale-Kohomologie von  $M$  ist für jede Triangulierung von  $M$  isomorph. Eine Möglichkeit die Triangulierung zu verfeinern, besteht darin, für jeden Simplex  $\sigma$  den Mittelpunkt von  $\sigma$  als neuen Eckpunkt hinzuzunehmen und ihn mit allen alten Ecken von  $\sigma$  zu verbinden.

## 5.9 Rechenregel für $v_k$

### Lemma 5.17

Sei  $Q = (q_0, \dots, q_{|Q|})$  ein aufsteigend sortiertes Tupel, also ein Seiten-Simplex von  $\Delta^n$ .

Sei  $P = (p_0, \dots, p_{|P|}) = Q^c$  das vervollständigende, aufsteigend sortierte Tupel zu  $Q$ , also das Seiten-Simplex der restlichen Ecken.

Es gelte  $\sum_{\lambda=0}^n t_\lambda = 1$  und (deshalb auch)  $\sum_{\lambda=0}^n dt_\lambda = 0$ .

Dann gilt:

$$\sum_{\phi=0}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\phi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} = -(|P| - 1) \cdot \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}}.$$

**Beweis:** Bemerkungen zur Rechnung der nächsten Seite:

**Zeile 2** hier wird  $dt_{p_\varphi}$  durch

$$dt_{p_\varphi} = - \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq p_\varphi}}^n dt_\lambda = - \sum_{\substack{\vartheta=0 \\ \vartheta \neq \varphi}}^{|P|} dt_{p_\vartheta} - \sum_{r=0}^{|Q|} dt_{q_r}$$

ersetzt.

**Zeile 3:** Die meisten Summanden von  $\sum_{r=0}^{|Q|} dt_{q_r}$  kommen bereits in  $dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \widehat{dt_{q_s}} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}}$  vor; es bleibt nur der Summand mit  $dt_{q_s}$  übrig.

**Zeile 5 1.** Term und **Zeile (6)** unterscheiden sich nur durch Vorzeichen und Variablenamen; sie heben sich gegenseitig auf.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\phi=0}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& \quad \sum_{\varphi=0}^{|P|} \sum_{\varphi \neq \phi} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \underbrace{dt_{p_\varphi}}_{\text{ersetzen}} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{\phi=1}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& = \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=1}^{|P|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \left( - \sum_{\substack{\vartheta=0 \\ \vartheta \neq \varphi}}^{|P|} dt_{p_\vartheta} \right) \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=0}^{|P|} \sum_{\varphi \neq \phi} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& = \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=1}^{|P|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \left( - \sum_{\substack{\vartheta=0 \\ \vartheta \neq \varphi}}^{|P|} dt_{p_\vartheta} \right) \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=1}^{|P|} \sum_{\varphi \neq \phi} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& \quad + \sum_{\phi=1}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=0}^{|P|} \sum_{\varphi \neq \phi} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& = - \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=1}^{|P|} \sum_{\substack{\vartheta=0 \\ \vartheta \neq \varphi}}^{|P|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\vartheta} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& \quad + \sum_{\phi=1}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\varphi=0}^{|P|} \sum_{\varphi \neq \phi} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_{s+1}} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
& = -(|P| - 1) \cdot \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}}
\end{aligned}$$

◇

**Lemma 5.18**

Voraussetzungen wie zuvor.

Sei  $Q + p_\phi$  das aufsteigend sortierte Tupel, das man erhält, wenn man  $p_\phi$  in  $Q$  einsortiert, und sei  $r$  die Stelle, an der  $p_\phi$  einsortiert wird, also  $(Q + p_\phi) = (q_0, \dots, q_{r-1}, p_\phi, q_r, \dots, q_{|Q|})$ .

Dann gilt:

$$\sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q| + 1)! \omega_{Q+p_\phi} \cdot (-1)^r = |Q|! d\omega_Q$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} & \sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q| + 1)! \omega_{Q+p_\phi} \cdot (-1)^r \\ &= \sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q| + 1)! \left( \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge \hat{dt}_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{r-1}} \wedge dt_{q_r} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + (-1)^r t_{p_\phi} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{s=r}^{|Q|} (-1)^{s+1} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{r-1}} \wedge dt_{p_\phi} \wedge dt_{q_r} \wedge \dots \wedge \hat{dt}_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \cdot (-1)^r \\ & \stackrel{\text{zur Stelle } q_s \text{ tauschen}}{=} \sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q| + 1)! \left( \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{s+r-1-s} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\phi} \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + (-1)^r t_{p_\phi} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{s=r}^{|Q|} (-1)^{s+1+s-r} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\phi} \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \cdot (-1)^r \\ & \stackrel{\text{Vorzeichen berechnen}}{=} \sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q| + 1)! \left( (-1)^{r+r} t_{p_\phi} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{s=0}^{|Q|} (-1)^{r-1+r} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\phi} \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{dt_{p_\phi} \text{ einsetzen}}{=} (|Q| + 1)! \sum_{\phi=0}^{|P|} \left( t_{p_\phi} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{s=0}^{|Q|} (-1)^s t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \left[ - \sum_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi \neq \phi}}^{|P|} dt_{p_\varphi} - dt_{q_s} \right] \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \\
&= (|Q| + 1)! \left( \sum_{\phi=0}^{|P|} t_{p_\phi} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{s=0}^{|Q|} (-1)^s t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge [-dt_{q_s}] \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \\
&\quad + \sum_{\phi=0}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} (-1)^s t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge \left[ - \sum_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi \neq \phi}}^{|P|} dt_{p_\varphi} \right] \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \Big) \\
&= (|Q| + 1)! \left( \sum_{\phi=0}^{|P|} \left[ \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} + t_{p_\phi} \right] dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + \sum_{\phi=0}^{|P|} \sum_{s=0}^{|Q|} \sum_{\substack{\varphi=0 \\ \varphi \neq \phi}}^{|P|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{s-1}} \wedge dt_{p_\varphi} \wedge dt_{q_s} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \\
&= (|Q| + 1)! \left( \underbrace{\left[ \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} + \sum_{\phi=0}^{|P|} t_{p_\phi} \right]}_{=1} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} + (|P| - 1) \cdot \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \right) \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.17}}{=} -(|P| - 1) \cdot \sum_{s=0}^{|Q|} t_{q_s} dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}} \\
&= (|Q|)! \cdot \underbrace{(|Q| + 1) dt_{q_0} \wedge \dots \wedge dt_{q_{|Q|}}}_{=d\omega_Q} = (|Q|)! d\omega_Q
\end{aligned}$$

◇

**Satz 5.19**

Es gilt:

$$\sum_{1 \leq |\zeta| < k+1} |\sigma|! \omega_\zeta \wedge \left( \sum_{s=0}^{|\zeta|} (-1)^s \mathcal{P}_{(\zeta_0, \dots, \hat{\zeta}_s, \dots, \zeta_{|\zeta|})}(\eta) \right) = \sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! d\omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma(\eta).$$

**Beweis:** Für einen Punkt  $x$  verschwindet  $\omega_\sigma$  nur dann nicht, wenn  $\sigma$  ein Seiten-Simplex von  $\tau$  ist, wobei  $x$  im Inneren von  $\tau$  liegt. Für den Punkt  $x$  brauchen also nur solche  $\sigma$  betrachtet zu werden, die in einem Simplex  $\tau$  liegen.

Da eine Auswahl von  $k$  Ecken eines  $k$ -Simplex ein  $(k-1)$ -Simplex bilden, kommen in der Behauptung auf beiden Seiten die gleichen  $P_\sigma$  vor. Sei  $\sigma$  ein festes  $k$ -Simplex und betrachte die Koeffizienten von  $P_\sigma$ :

Um auf der linken Seite  $P_\sigma$  zu erhalten, braucht man ein  $(k+1)$ -Simplex  $\zeta = \sigma + p_\phi$  das beim Weglassen seiner Ecken  $e_{p_\phi} = e_{\zeta_r}$  das Simplex  $\sigma$  erzeugt.

Seien  $P = (p_0, \dots, p_{|P|})$  die Ecken von  $\tau$ , die nicht in  $\sigma$  vorkommen. In dieser Schreibweise erhält man für die linke Seite:

$$\sum_{0 \leq |\sigma| < k} \sum_{\phi=0}^{|P|} |\sigma + p_\phi|! \omega_{\sigma+p_\phi} \wedge \sum_{s=0}^{|\sigma|+1} (-1)^s \mathcal{P}_{(\zeta_0, \dots, \hat{\zeta}_s, \dots, \zeta_{|\sigma|+1})}(\eta).$$

Da  $\zeta$  durch Weglassen der  $r$ -ten Ecke zu  $\sigma$  wird, gilt für  $s = r$ :

$$\mathcal{P}_{(\zeta_0, \dots, \hat{\zeta}_s, \dots, \zeta_{|\sigma|+1})} = \mathcal{P}_\sigma.$$

Zusammen mit  $\sum_{\phi=0}^{|P|} (|Q|+1)! \omega_{Q+p_\phi} \cdot (-1)^r = |Q|! d\omega_Q$  aus Lemma 5.18 folgt:

$$\sum_{0 \leq |\sigma| < k} \sum_{\phi=0}^{|P|} |\sigma + p_\phi|! \omega_{\sigma+p_\phi} \wedge \sum_{s=0}^{|\sigma|+1} (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{r-1} \hat{p}_\phi, \sigma_r, \dots, \sigma_{|\sigma|})}(\eta) = \sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! d\omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma.$$

◇

**5.10  $I$  ist fast injektiv:  $E \circ I - \text{id} = (v_{k+1}d) + (dv_k)$** 

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass  $E \circ I - \text{id} = \text{Kozykel}$  auf Kettenebene ein Kozykel ist.

**Satz 5.20**

Für  $k = 0, 1, \dots, p$  gilt:

$$E \circ I - \text{id} = v_{k+1} \circ d + d \circ v_k.$$

Also ist  $I$  bis auf einen Kozykel injektiv.

**Beweis:** Sei  $\eta \in \Omega^k(M)$ , wobei  $k \geq 0$ . Erinnerung: Lemma (5.11) liefert:

$$\mathcal{P}_\sigma(d\eta) = (-1)^{|\sigma|+1} d\mathcal{P}_\sigma(\eta) - \sum_{s=0}^{|\sigma|} (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, \sigma_{|\sigma|})}(\eta) \text{ f\"ur } |\sigma| < k,$$

und zusammen mit Lemma (5.9) gilt:

$$\mathcal{P}_\sigma(d\eta) = (-1)^k \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})}(\eta)(e_{\sigma_k}) - \sum_{s=0}^k (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, \sigma_k)}(\eta) \text{ f\"ur } |\sigma| = k.$$

**Beobachtung:**  $(-1)^k \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})}(\eta)(e_{\sigma_k}) \stackrel{5.12}{=} \int_\sigma \eta \stackrel{\text{Def}}{=} I(\eta)_\sigma$ .

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{k+1}(d\eta) &= \sum_{0 \leq |\sigma| < k+1} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma(d\eta) \\ &= \sum_{|\sigma|=k} |\sigma|! \omega_\sigma \cdot \left( \underbrace{(-1)^k \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1})}(\eta)(e_{\sigma_k})}_{=I(\eta)_\sigma} \right) + \underbrace{\sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge ((-1)^{|\sigma|+1} d\mathcal{P}_\sigma(\eta))}_{=*} \\ &\quad - \sum_{0 \leq |\sigma| < k+1} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge \left( \sum_{s=0}^{|\sigma|} (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, \sigma_{|\sigma|})}(\eta) \right) \\ &= E(I(\eta)) + * - \underbrace{\sum_{1 \leq |\sigma| < k+1} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge \left( \sum_{s=0}^{|\sigma|} (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, \sigma_{|\sigma|})}(\eta) \right)}_{\stackrel{5.19}{=} \sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! d\omega_\sigma \wedge P_\sigma(\eta)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{0=|\sigma|} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge \sum_{s=0}^{|\sigma|} (-1)^s \mathcal{P}_{(\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, \sigma_{|\sigma|})}(\eta)}_{=\eta} \\ &= E(I(\eta)) + \eta - \sum_{0 \leq |\sigma| < k} |\sigma|! d\omega_\sigma \wedge P_\sigma(\eta) + * . \end{aligned}$$

Und da:

$$\begin{aligned} d(v_k \eta) &= \sum_{0 \leq |\sigma| < k} (|\sigma|! d\omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma(\eta) + (-1)^{|\sigma|} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge d\mathcal{P}_\sigma(\eta)) \\ &= \sum_{0 \leq |\sigma| < k} (|\sigma|! d\omega_\sigma \wedge \mathcal{P}_\sigma(\eta)) - \underbrace{\sum_{0 \leq |\sigma| < k} (-1)^{|\sigma|+1} |\sigma|! \omega_\sigma \wedge d\mathcal{P}_\sigma(\eta)}_{=*} \text{ ist,} \end{aligned}$$

folgt insgesamt:  $v_{k+1}(d\eta)_\tau + d(v_k \eta)_\tau = E(I(\eta)) + \eta$ .  $\diamond$

## Teil II

# Multiplikation

Auf beiden Kohomologie-Theorien sind Produkte definiert. In den folgenden Kapiteln werden die Produkte definiert und gezeigt, dass die Abbildungen  $I$  und  $E$  mit ihnen verträglich sind.

## 6 Wedge-Produkt $\wedge$

Auf der de Rham Kohomologie gibt es das bekannte  $\wedge$ -Produkt. Seine Definition und Eigenschaften werden kurz wiederholt. Zur Vertiefung ist [8] geeignet.

### 6.1 Definition $\wedge$

#### Definition 6.1 ( $\wedge$ auf einem Vektorraum)

Sei  $V$  ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum, und seien  $\omega \in \text{Alt}^p V$  und  $\eta \in \text{Alt}^q V$ . Die durch

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\substack{\varsigma \text{ Permutation} \\ \text{von } (1 \dots p+q)}} \text{sign}(\varsigma) \cdot \omega(v_{\varsigma_1}, \dots, v_{\varsigma_p}) \cdot \eta(v_{\varsigma_{p+1}}, \dots, v_{\varsigma_{p+q}})$$

definierte alternierende  $(p+q)$ -Form heißt das Dachprodukt von  $\omega$  und  $\eta$ .

#### Definition 6.2 ( $\wedge$ auf $M$ )

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit.

Das Dachprodukt ist eine Abbildung  $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{p+q}(M)$ , definiert durch:

$$(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x.$$

### 6.2 Eigenschaften $\wedge$

#### Bemerkung 6.3

Das Dachprodukt  $\wedge : \text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^{p+q} V$  hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\wedge$  ist bilinear.
2.  $\wedge$  ist assoziativ.
3.  $\wedge$  ist graduiert antikommutativ.
4. Eine 0-Form  $g \in \text{Alt}^0 V = \mathbb{R}$  erfüllt:  $g \wedge \omega = g \cdot \omega$  für alle  $\omega \in \text{Alt}^r V$ .
5.  $\wedge$  ist mit linearen Abbildungen  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  verträglich:  $f^* \omega \wedge f^* \eta = f^*(\omega \wedge \eta)$ .

## 7 Cup-Produkt $\cup$

### 7.1 Definition $\cup$

**Erinnerung:**  $C^*(T) := \text{HOM}(C_*(T), \mathbb{R})$

#### Definition 7.1 (Approximation der Diagonalen)

Eine **Approximation der Diagonalen**  $\Phi$  ist eine natürliche Transformation (also für Kokettenkomplexe eine Kokettenabbildung)  $\Phi : C_*(T) \rightarrow C_*(T) \otimes_{\mathbb{R}} C_*(T)$ , die für  $\sigma_0 \in S_0(T)$ :

$$\Phi(\sigma_0) = \sigma_0 \otimes \sigma_0$$

erfüllt.

#### Definition 7.2 (Cup-Produkt)

Der (kontravariante)  $\text{HOM}(\cdot, \mathbb{R})$  Funktor überträgt die Approximation der Diagonalen  $\Phi$  in die Koketten. Die Abbildung:

$$\cup : C^*(T) \otimes C^*(T) \xrightarrow{\Phi^*} \text{Hom}(C_*(T) \otimes C_*(T), \mathbb{R}) \rightarrow C^*(T)$$

heißt Cup-Produkt.

### 7.2 verschiedene $\cup$ -Produkte

Auf den Ketten kann man viele verschiedene  $\Phi$  definieren, aber sie liefern (nach [5]) auf Kohomologie dasselbe  $\cup$ -Produkt. Im Folgenden wird gezeigt, dass es auf simplizialen Koketten ein  $\cup$ -Produkt gibt, welches mit der Abbildung  $I$  verträglich ist.

Seien im Folgenden  $a = (a_\alpha) \in C^p(T)$  mit  $\alpha \in S_p(T)$ ,  $b = (b_\beta) \in C^q(T)$  mit  $\beta \in S_q(T)$  und  $c = (c_\gamma) \in C^r(T)$  mit  $\gamma \in S_r(T)$ .

Um ein Produkt auf den Koketten zu definieren, das auf die Kohomologie übertragen ein  $\cup$ -Produkt ist, reicht es, Abbildungen  $C^p(T) \otimes C^q(T) \rightarrow C^{p+q}(T)$  zu konstruieren, die folgende Eigenschaften erfüllen:

**Approximation der Diagonalen:**  $(f \cup \tilde{f})(\sigma_0) = f_{\sigma_0} \cdot \tilde{f}_{\sigma_0}$

**Kettenabbildung:**  $\partial(a \cup b) = (\partial(a)) \cup b + (-1)^p a \cup \partial(b)$

#### 7.2.1 Alexander-Whitney-Produkt:

##### Definition 7.3

Die Abbildung

$$(a \cup_a b)_\chi := a_{\mathcal{U}_{(0, \dots, p)}(\chi)} \cdot b_{\mathcal{U}_{(p, \dots, p+q)}(\sigma)}$$

heißt Alexander-Whitney-Produkt.

**Lemma 7.4**

Das Alexander-Whitney-Produkt bildet auf Kohomologie ein  $\cup$ -Produkt.

**Beweis:**

**Approximation der Diagonalen:**  $(f \cup_a \tilde{f})(\sigma_0) = f_{\sigma_0} \cdot \tilde{f}_{\sigma_0}$

**Kettenabbildung:**  $\partial(a \cup_a b)(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+q+1}) = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i (a \cup_a b)_{\mathcal{U}_i(\sigma)} =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^p (-1)^i a_{\mathcal{U}_i(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+1})} \cdot b_{(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{q+p+1})} + \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i a_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} \cdot b_{\mathcal{U}_i(\sigma_p, \dots, \sigma_{q+p+1})} \\ &= \left( (\partial(a)_{(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+1})}) - (-1)^{p+1} a_{\mathcal{U}_{p+1}(\sigma_0, \dots, \sigma_{p+1})} \right) \cdot b_{(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{q+p+1})} \\ &\quad + a_{(\sigma_0, \dots, \sigma_p)} \cdot \left( -(-1)^p b_{\mathcal{U}_p(\sigma_p, \dots, \sigma_{q+p+1})} \right) + (-1)^p \partial(b)_{(\sigma_p, \dots, \sigma_{q+p+1})} \\ &= (\partial(a)) \cup_a b + (-1)^p a \cup_a \partial(b) \end{aligned}$$

◇

Eigenschaften des Alexander-Whitney-Produkts:

**Assoziativität:** Sie folgt aus der Assoziativität der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} (a \cup_a b) \cup c_{(0, \dots, p, \dots, p+q, \dots, p+q+r)} &= (a \cup_a b)_{(0, \dots, p, \dots, p+q)} \cdot c_{(p+q, \dots, p+q+r)} \\ &= a_{(0, \dots, p)} \cdot b_{(p, \dots, p+q)} \cdot c_{(p+q, \dots, p+q+r)} \\ &= a_{(0, \dots, p)} \cdot (b \cup_a c)_{(p, \dots, p+q, \dots, p+q+r)} \\ &= a \cup_a (b \cup_a c)_{(0, \dots, p, \dots, p+q, \dots, p+q+r)}. \end{aligned}$$

**nicht graduiert kommutativ:** Besonderes Gewicht bekommt die letzte Ecke vom ersten Faktor ( $p$ ), da sie von  $a$  und  $b$  ausgewertet wird. Eine andere Anordnung der Ecken liefert ein anderes Produkt. Deshalb ist dieses Cup-Produkt nicht graduiert kommutativ.

$$a \cup_a b(x, y, z) := a(x, y) \cdot b(y, z) \neq b(x, y) \cdot a(y, z) =: b \cup_a a(x, y, z)$$

**7.2.2 Misch-Produkt:**

Um die Anordnung der Ecken vernachlässigen zu können, bildet man den Mittelwert der Alexander-Whitney-Produkte jeder möglichen Auswahl an Ecken. Um Antikommutativität zu erreichen, multipliziert man mit einem geeigneten Vorzeichen.

**Definition 7.5** ( $\text{sign}(I, J)$ )

Seien  $I$  und  $J$  aufsteigend sortierte Tupel mit Werten aus  $\{0, \dots, n\}$ , so dass jeder Wert in  $I$  oder  $J$  angenommen wird und es genau einen Eintrag gibt, der in  $I$  und  $J$  vorkommt.

Sei also  $i_x = j_y$ .

Dann ist  $\text{sign}(I, J)$  definiert als das Vorzeichen der Permutation, die

$$((x + y + 1), \dots, n, 0, \dots, (x + y - 1)) \xrightarrow{\text{Permutation}} (i_0, \dots, \hat{i}_x, \dots, i_p, j_0, \dots, \hat{j}_y, \dots, j_q)$$

überführt multipliziert mit  $(-1)^{x+y}$ .

Also:

$$\text{sign}(I, J) := \text{sign}(\text{Permutation}) \cdot (-1)^{x+y}.$$

### Definition 7.6 (Misch-Produkt)

Seien  $I$  und  $J$  wie zuvor gewählt. Sei  $\sigma = (0, \dots, p + q)$

Das Misch-Produkt oder „shuffle product“ ist definiert durch:

$$(a \cup_m b)_\sigma := \frac{p!q!}{p + q + 1} \sum_{|I|=p} a_{\mathcal{U}_I(\sigma)} \cdot b_{\mathcal{U}_J(\sigma)} \cdot \text{sign}(I, J).$$

$I$  und  $J$  repräsentieren, als aufsteigend sortierte Tupel, geordnete Seiten-Simplices von  $\sigma$ , mit der Eigenschaft, dass  $I$  und  $J$  genau eine Ecke gemeinsam haben.

### Bemerkung 7.7

Die Anzahl der Summanden berechnet sich durch:

Wähle  $p + 1$  Elemente aus  $p + q + 1$  Elementen aus. Hierzu gibt es  $\binom{p+q+1}{p+1}$  Möglichkeiten. Wähle nun aus diesen  $p + 1$  Elementen eines aus ( $j$ ).

Dies ergibt  $\frac{p+q+1}{p!q!}$  Möglichkeiten, da  $\binom{p+q+1}{p+1} \cdot (p + 1) = \frac{p+q+1}{p!q!}$ .

### Lemma 7.8

Das Misch-Produkt bildet auf Kohomologie ein  $\cup$ -Produkt.

**Beweis:**

**Approximation der Diagonalen:**

$$(f \cup_m \tilde{f})(\sigma_0) = \frac{0!0!}{0 + 0 + 1} \sum_{|I|=0} f_{\mathcal{U}_I(\sigma_0)} \cdot \tilde{f}_{\mathcal{U}_J(\sigma_0)} = f_{\sigma_0} \cdot \tilde{f}_{\sigma_0}$$

**Kettenabbildung:** Da das Alexander-Whiney-Produkt eine Kettenabbildung ist, ist es auch das Misch-Produkt.

◇

### Bemerkung 7.9

Durch Nachrechnen lässt sich zeigen, dass das Misch-Produkt graduiert kommutativ (assoziativ) ist. Im folgenden Kapitel wird gezeigt, dass das Misch-Produkt mit den Abbildung  $E$  und  $I$  verträglich ist. Aus der graduiert Antikommutativität (Assoziativität) des  $\wedge$ -Produkts folgt dann direkt, dass auch das Misch-Produkt graduiert antikommutativ (assoziativ) ist.

## 8 Multiplikatitat von $I$ und $E$

### 8.1 Rechenregel fur $\omega_I$

Seien  $I_{0,p} = (i_0, \dots, i_p)$  und  $J_{0,q} = (j_0, \dots, j_q)$  aufsteigend sortierte Tupel mit Werten in  $\{0, \dots, n\}$ .

Mit den Eigenschaften:

1.  $p + q = n$
2.  $I_{0,p}$  und  $J_{0,q}$  haben genau ein Element gemeinsam. Sei  $i_x = j_y$ .

#### Bemerkung 8.1

Setze:

$$d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} := d\epsilon_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{i_x}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{i_p}$$

Seien  $\epsilon_\lambda$  T1-Funktionen in Bezug auf die offenen Sterne der Eckpunkt  $e_0, \dots, e_n$  eines Simplex. Fur sie gilt

- $\sum_{\lambda=0}^n \epsilon_\lambda = 1$ ,
- $\sum_{\lambda=0}^n d\epsilon_\lambda = 0$ , also:  $d\epsilon_y = -\sum_{\lambda=0, \lambda \neq y}^n d\epsilon_\lambda$ .

#### Lemma 8.2 (Tausch-Lemma)

Fur  $s \neq y$  gilt:

$$d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{s},\dots,q}} = (-1)^{y+s} d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{y},\dots,q}}$$

und fur  $s \neq x$  gilt:

$$d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{s},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{y},\dots,q}} = (-1)^{x+s} d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{y},\dots,q}}.$$

#### Beweis:

Idee: ˆNutze die Eigenschaften der T1-Funktionen; ersetze ein  $d\epsilon_k$ . Es kommen fast alle  $d\epsilon_\lambda$  vor, daher fallen fast alle Summanden weg.

1. Fall: Sei  $s \neq y$

$$\begin{aligned} & d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{s},\dots,q}} \\ &= d\epsilon_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{i_x}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{i_p} \wedge d\epsilon_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{j_s}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{j_y} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{j_q} \\ &= d\epsilon_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{i_x}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{i_p} \wedge d\epsilon_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{j_s}} \wedge \dots \wedge \underbrace{\left( -\sum_{\lambda=0, \lambda \neq j_y}^n d\epsilon_\lambda \right)}_{\substack{\text{bis auf fur } \lambda = j_s \\ \text{kommen alle Summanden schon vor}}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{j_q} \\ &= (-1) d\epsilon_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{i_x}} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{i_p} \wedge d\epsilon_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{d\epsilon_{j_s}} \wedge \underbrace{\left( \dots \wedge d\epsilon_{j_s} \right)}_{y-s-1} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{j_q} \\ &= (-1)^{y+s} d\epsilon_{I_{0,\dots,\hat{x},\dots,p}} \wedge d\epsilon_{J_{0,\dots,\hat{y},\dots,q}} \end{aligned}$$

Die anderen Falle genauso. ◊

Erinnerung:

$$\omega_{I_0,k} := \sum_{s=0}^k (-1)^s \epsilon_{i_s} d\epsilon_{i_0} \wedge \dots \wedge \hat{d\epsilon}_{i_s} \wedge \dots \wedge d\epsilon_{i_k}$$

**Lemma 8.3** ( $\omega_I \wedge \omega_J$ )

Es gilt:

$$\omega_{I_0,p} \wedge \omega_{J_0,q} = (-1)^{x+y} \epsilon_{i_x} d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \wedge d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q}$$

**Beweis:**

Beobachtung: Es sind nur die Produkte ungleich Null, für die in höchstens einem Faktor  $d\epsilon_{i_x}$  bzw.  $d\epsilon_{j_y}$  vorkommt.

$$\begin{aligned} \omega_{I_0,p} \wedge \omega_{J_0,q} &= (-1)^x \epsilon_{i_x} d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \cdot (-1)^y \epsilon_{j_y} d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q} \\ &+ (-1)^x \epsilon_{i_x} d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \cdot \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \neq y}} (-1)^s \epsilon_{j_s} d\epsilon_{J_0 \dots \hat{s} \dots q} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq s \leq p \\ s \neq x}} (-1)^s \epsilon_{i_s} d\epsilon_{I_0 \dots \hat{s} \dots p} \cdot (-1)^y \epsilon_{j_y} d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q} \\ \text{Tausch Lemma} &= \left( (-1)^{x+y} \epsilon_{i_x} \epsilon_{j_y} + (-1) \epsilon_{i_x} \cdot \sum_{\substack{0 \leq s \leq q \\ s \neq y}} (-1)^s \epsilon_{j_s} \cdot (-1)^{y+s} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{0 \leq s \leq p \\ s \neq x}} (-1)^s \epsilon_{i_s} \cdot (-1)^y \epsilon_{j_y} \cdot (-1)^{x+s} \right) \cdot d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \wedge d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q} \\ (\epsilon_{j_y} = \epsilon_{i_x}) &= \epsilon_{i_x} \cdot (-1)^{x+y} \underbrace{\left( \epsilon_{i_x} + \sum_{\substack{0 \leq s \leq p \\ s \neq x}} \epsilon_{j_s} + \sum_{\substack{0 \leq s \leq p \\ s \neq x}} \epsilon_{i_s} \right)}_{=\sum_{\lambda}^n d\epsilon_{\lambda}=1} \cdot d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \wedge d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q} \\ &= (-1)^{x+y} \epsilon_{i_x} d\epsilon_{I_0 \dots \hat{x} \dots p} \wedge d\epsilon_{J_0 \dots \hat{y} \dots q} \end{aligned}$$

◇

## 8.2 $I$ ist mit den Produkten auf Kohomologie-Niveau verträglich

Für die Kohomologie-Theorien  $H_{dR}(\Omega^*(M))$  und  $H_{simp}(C^*(T))$  ist also jeweils ein Produkt ( $\wedge$  und  $\cup$ ) gegeben. Zwischen den Kohomologien gibt es einen Isomorphismus, induziert durch  $I (= \int_{\Delta} \omega)$ . In welcher Beziehung die Produkte zueinander stehen wird im folgenden gezeigt.

### Satz 8.4

$I$  ist mit den Produkten auf Kohomologie-Niveau verträglich. Also kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^p(M) \otimes H_{dR}^q(M) & \xrightarrow{I \otimes I} & H_{simp}^p(T) \otimes H_{simp}^q(T) \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \cup \\ H_{dR}^{p+q}(M) & \xrightarrow{I} & H_{simp}^{p+q}(T) \end{array}$$

### Beweis:

Da auf Kohomologie-Niveau  $I^{(-1)} = E$  gilt, reicht es zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) & \xleftarrow{E \otimes E} & C^p(T) \otimes C^q(T) \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \cup \\ \Omega^{p+q}(M) & \xrightarrow{I} & C^{p+q}(T) \end{array}$$

Sei  $a \in C^p(T)$ , und sei  $b \in C^q(T)$ .

$$(E(a) \wedge E(b)) = \left( p! \sum_{|\sigma|=p} \omega_{\sigma} a_{\sigma} \right) \wedge \left( q! \sum_{|\rho|=q} \omega_{\rho} b_{\rho} \right)$$

Nur wenn  $\sigma$  und  $\rho$  Seiten-Simplices von einem Simplex sind, in dessen Inneren der Punkt liegt, verschwinden weder  $\omega_{\sigma}$  noch  $\omega_{\rho}$ .

$$\begin{aligned} &= p!q! \left( \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \sigma, \rho \text{ Seiten-Simplices}}} \underbrace{\omega_{\sigma} \wedge \omega_{\rho}}_{\text{oft kommt } d\epsilon \text{ zweimal vor}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \right) \\ \text{Lemma } \omega_{\sigma} \wedge \omega_{\rho} \text{ 8.3} &= p!q! \left( \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s = \rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot (-1)^{r+s} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0, \dots, \hat{s}, \dots, p} \wedge d\epsilon_{\rho_0, \dots, \hat{r}, \dots, q} \right) \end{aligned}$$

Nun betrachte:  $I((E(a) \wedge E(b))) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau} \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0, \dots, \hat{s}, \dots, p} \wedge d\epsilon_{\rho_0, \dots, \hat{r}, \dots, q} \cdot (-1)^{r+s} \right) \\
\text{sign}(\sigma, \rho) &= \int_{\tau} \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \epsilon_{\tau_s} d\epsilon_{\tau_{(s+r+1, \dots, n, 0, s+r-1)}} \right) \\
&= \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \int_{\tau} \epsilon_{\tau_s} d\epsilon_{\tau_{(s+r+1, \dots, n, 0, s+r-1)}} \right) \\
\text{Korollar 5.3} &= p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \frac{1}{p+q+1!} \\
&= (a \cup b)
\end{aligned}$$

◇

## Teil III

# $L^2$ - deRham Satz

## 9 $L^2$ -de Rham Kohomologie

Sei  $\tilde{M}$  eine freie cokompakte  $G$ -Mannigfaltigkeit mit Fundamentalbereich  $M$ . In diesem Kapitel wird für  $\tilde{M}$  die reduzierte und die unreduzierte  $L^2$ -de Rham Kohomologie definiert.

### 9.1 Definition $\Omega_p^*(\tilde{M})$

#### Definition 9.1 ( $\Omega_c^*(\tilde{M})$ )

Die Formen mit kompaktem Träger auf  $\tilde{M}$  werden mit

$$\Omega_c^*(\tilde{M})$$

bezeichnet.  $\Omega_c^*(\tilde{M})$  ist eine Teilmenge von  $\Omega^*(\tilde{M})$ .

Die Formen mit kompaktem Träger sind über die ganze Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  integrierbar, da sie nur auf einem Kompaktum nicht verschwinden.

#### Definition 9.2 ( $L^p$ -Norm auf $\Omega^*(\tilde{M})$ )

Sei  $1 \leq p < \infty$ . Sei  $\omega \in \Omega^q(\tilde{M})$ . Dann ist durch:

$$\|\omega\|_p := \left( \int_{\tilde{M}} |\omega(x)|^p d\text{vol} \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm definiert. Sie heißt  $L^p$ -Norm. Dabei ist  $|\omega(x)|$  der Betrag (die Länge) des Vektors im Tangentialraum an  $x$ .

$(\Omega_c^*(\tilde{M}), \|\bullet\|_p)$  ist nicht vollständig.

#### Definition 9.3 ( $\Omega_p^*(\tilde{M})$ )

Die Banachraum-Vervollständigung von  $\Omega_c^*(\tilde{M})$  bezüglich einer  $L^p$ -Norm heißt Raum der  $L^p$ -integrierbaren Formen über  $\tilde{M}$ . Er wird mit  $\Omega_p^*(\tilde{M})$  bezeichnet. Die Formen  $\omega \in \Omega_p^*(\tilde{M})$  erfüllen  $\|\omega\|_p < \infty$ .

Die Formen in  $\Omega_p^*(\tilde{M})$  sind zwar  $L^p$ -integrierbar, aber nicht mehr notwendigerweise stetig.

## 9.2 Definition der $L^2$ -de Rham Kohomologie

Für die Definition der  $L^2$ -de Rham Kohomologie ist natürlich die Vervollständigung bezüglich der  $L^2$ -Norm  $\Omega_2^*(\tilde{M})$  von besonderer Bedeutung. Zur  $L^2$ -Norm gibt es ein Skalarprodukt.

### Definition 9.4 ( $L^2$ -Skalarprodukt auf $\Omega_c^p(\tilde{M})$ )

Seien  $\omega, \eta \in \Omega_c^p(\tilde{M})$ . Das Skalarprodukt definiert durch:

$$\langle \omega, \eta \rangle_{L^2} := \int_{\tilde{M}} \langle \omega_x, \eta_x \rangle_{Alt^p(T_x \tilde{M})} dvol$$

heißt  $L^2$ -Skalarprodukt.

Das  $L^2$ -Skalarprodukt lässt sich auch auf die Vervollständigung  $\Omega_2^*(\tilde{M})$  fortsetzen, also ist  $\Omega_2^*(\tilde{M})$  sogar ein Hilbertraum.

### Bemerkung 9.5 ( $d_{min}$ )

Der Randoperator  $d$  ist nur für Formen mit kompaktem Träger definiert. Er lässt sich wie in [1] gezeigt zu

$$d_{min} := (d : \Omega_c(\tilde{M}) \rightarrow \Omega_p(\tilde{M}))_{min}$$

fortsetzen.

### Definition 9.6 (Unreduzierte $L^p$ -de Rham Kohomologie)

Da gilt  $\text{Kern}(d) \subset \text{Bild}(d)$ , gilt auch  $\text{Kern}(d_{min}) \subset \text{Bild}(d_{min})$ . Der Raum :

$$H_{dR^p}^q(\tilde{M}) = \text{Kern}(d_{min}^q) / \text{Bild}(d_{min}^{q-1})$$

heißt  $q$ -te unreduzierte  $L^p$ -de Rham Kohomologie.

Leider ist die unreduzierte  $L^2$ -de Rham Kohomologie nicht notwendigerweise wieder ein Hilbertraum. Das motiviert folgende Definition.

### Definition 9.7 (Reduzierte $L^2$ -de Rham Kohomologie)

Der durch:

$$H_{dR^2}^q(\tilde{M}) = \text{Kern}(d_{min}^q) / \overline{\text{Bild}(d_{min}^{q-1})}$$

definierte Hilbertraum heißt  $q$ -te reduzierte  $L^2$ -de Rham Kohomologie.

Als Quotient von abgeschlossenen Teilmengen eines Hilbertraums ist die reduzierte  $L^2$ -de Rham Kohomologie wieder ein Hilbertraum.

## 10 $l^2$ -Simpliziale Kohomologie

Sei  $\tilde{T}$  eine äquivariante glatte Triangulierung von  $\tilde{M}$  mit  $G$ -invarianter lokaler Ordnung.

### Bemerkung 10.1

Die Ecken von  $T$  können nun nicht mehr global geordnet werden, da die Ordnung  $G$ -invariant sein soll.

### 10.1 Definition $C_p^*(\tilde{T})$

Ähnlich wie für die  $L^2$ -Formen werden die  $l^2$ -summierbaren Koketten aus einer Untermenge der simplizialen Koketten konstruiert.

### Definition 10.2 ( $C_b^*(\tilde{T})$ )

Die beschränkten simplizialen Koketten auf  $\tilde{T}$  werden mit

$$C_b^*(\tilde{T})$$

bezeichnet.  $C_b^*(\tilde{T})$  ist eine Teilmenge von  $C^*(\tilde{T})$ .

Die beschränkten simplizialen Koketten auf  $\tilde{T}$  sind über alle Simplices summierbar, da die Koketten nur für endlich viele Simplices nicht verschwinden.

### Definition 10.3 ( $l^p$ -Norm auf $C_b^*(\tilde{T})$ )

Sei  $1 \leq p < \infty$ . Sei  $c \in C^q(\tilde{T})$ . Dann ist durch:

$$\|c\|_p := \left( \sum_{\sigma \in S_q(\tilde{T})} |c_\sigma|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm definiert, sie heißt  $l^p$ -Norm.

$(C_b^*(\tilde{T}), \|\bullet\|_p)$  ist nicht vollständig.

### Definition 10.4 ( $C_p^*(\tilde{T})$ )

Die Banachraum-Vervollständigung von  $C_b^*(\tilde{T})$  bezüglich einer  $l^p$ -Norm heißt Raum der  $l^p$ -summierbaren simplizialen Koketten auf  $\tilde{T}$ , sie wird mit  $C_p^*(\tilde{T})$  bezeichnet. Die Koketten  $c \in C_p^*(\tilde{T})$  erfüllen  $\|c\|_p < \infty$ .

Im Gegensatz zu den Formen bildet  $C_p^*(\tilde{T})$  einen Subkomplex von  $C^*(\tilde{T})$ .

## 10.2 Definition der $l^p$ -simplicialen Kohomologie

Für die Definition der  $l^2$ -simplicialen Kohomologie ist natürlich die Vervollständigung bezüglich der  $l^2$ -Norm  $C_2^*(\tilde{T})$  von besonderer Bedeutung. Zur  $l^2$ -Norm gibt es ein Skalarprodukt.

### Definition 10.5 ( $l^2$ -Skalarprodukt auf $C_b^p(\tilde{T})$ )

Seien  $c, d \in C_b^p(\tilde{T})$ . Das durch:

$$\langle c, d \rangle_{l^2} := \sum_{\sigma \in S_p(\tilde{M})} c_\sigma \cdot d_\sigma$$

definierte Skalarprodukt heißt  $l^2$ -Skalarprodukt.

Das  $l^2$ -Skalarprodukt lässt sich auch auf die Vervollständigung  $C_2^*(\tilde{T})$  fortsetzen. So wird  $C_2^*(\tilde{T})$  ein endlicher Hilbert  $\mathcal{N}(G)$ -Koketten Komplex mit Skalarprodukt  $\langle \bullet, \bullet \rangle_{l^2}$ . Jeder Simplex der Triangulierung ist Seiten-Simplex von nur endlich vielen Simplices. Da  $\tilde{T}$   $G$ -invariant und  $\tilde{M}$  cökompakt, also  $M$  kompakt ist, ist das Maximum der Anzahl der Simplices, die einen Simplex gemeinsam haben, endlich. Setze  $k$  als dieses Maximum.

### Bemerkung 10.6 ( $\delta$ )

Der Randoperator  $\delta$  ist für jede simpliciale Kokette definiert, also auch für die  $l^2$ -summierbaren Koketten. Da die Anzahl der Summanden bei der Randabbildung durch  $k$  beschränkt sind, ist der Rand einer  $l^2$ -summierbaren Koketten wieder  $l^2$ -summierbar. Zur Erinnerung:

$$(\delta c)_\sigma := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c_{\mathcal{U}_i(\sigma)}.$$

Die genauer Rechnung zum Beweis findet sich in [7].

### Definition 10.7 (Unreduzierte $l^p$ -simpliciale Kohomologie)

Ähnlich wie für Formen setze:

$$H_{\text{simp}^p}^q(\tilde{T}) := \text{Kern}(\delta^q|_{C_p(\tilde{T})}) / \text{Bild}(\delta^{q-1}|_{C_p(\tilde{T})}).$$

Diese Gruppe heißt  $q$ -te unreduzierte  $l^p$ -simpliciale Kohomologie.

Um nun auch für die  $l^2$ -simplicialen Koketten einen Hilbertraum zu konstruieren, betrachte folgende Definition.

### Definition 10.8 (Reduzierte $l^2$ -de Rham Kohomologie)

Der durch:

$$H_{\text{simp}^2}^q(\tilde{T}) := \text{Kern}(\delta^q|_{C_2(\tilde{T})}) / \overline{\text{Bild}(\delta^{q-1}|_{C_2(\tilde{T})})}$$

definierte Hilbertraum heißt  $q$ -te reduzierte  $l^2$ -simpliciale Kohomologie.

## 11 Multiplikatvität des $L^2$ -de Rham Isomorphismus

### 11.1 Isomorphie

Die Isomorphie zwischen der unreduzierten  $L^2$ -de Rham Kohomologie und der unreduzierten  $l^2$ -simpliciale Kohomologie kann mit Hilfe der „sheaf“-Theorie gezeigt werden. Beweis-Fragmente können in [13] gefunden werden.

Für die reduzierten  $L^2$ - bzw.  $l^2$ -Kohomologien kann man, ähnlich wie für die Kohomologien im klassischen Fall, die Operatoren  $I$  und  $E$  definieren.

Mittels Hodge-Zerlegung lässt sich zeigen, dass  $H_{\overline{\mathbb{R}^2}}^*(\tilde{M})$  isomorph zum Raum der  $L^2$ -integrierbaren, glatten, harmonischen Formen  $\mathcal{H}_{(2)}^*(M)$  ist. Für genügend große  $k$  ist die Inklusion  $\mathcal{H}_{(2)}^*(M)$  in den  $(k - *)$ -ten Sobolev-Raum  $H_{(2)}^*(W^{k-*}\Omega^p(M))$  ein Isomorphismus. Auf den Sobolevräumen lässt sich  $I$  analog zum klassischen Fall definieren und bildet die Umkehrabbildung zu  $E$ . Der zusammengesetzte Isomorphismus heißt  $L^2$ -Hodge-de Rham-Isomorphismus.

$$H_{\overline{\mathbb{R}^2}}^*(\tilde{M}) \cong \underbrace{\mathcal{H}_{(2)}^*(M)}_{L^2\text{-Harmonische Formen}} \cong \underbrace{H_{(2)}^*(W^{k-*}\Omega^p(M))}_{\text{Sobolev-Räume}} \xrightarrow{I} H_{\text{simp}^p}^*(\tilde{T})$$

Der Beweis findet sich in [4] oder zusammengefasst in [11]. In diesem Beweis wird viel Kraft für die Injektivität von  $I$  verwendet, wahrscheinlich geht es mit einem auf den  $L^2$ -Fall angepassten Prismaoperator leichter.

In diesem Kapitel soll angedeutet werden, warum der Isomorphismus für den reduzierten Fall auch mit der den Produkten verträglich ist.

### 11.2 Satz: $L^2 \wedge L^2 \in L^1$

In diesem Kapitel soll für den Spezialfall  $p + q = \dim(\tilde{M})$  gezeigt werden, dass auch der  $L^2$ -Hodge-de Rham Isomorphismus in gewisser Weise mit der Multiplikation verträglich ist. Da das Produkt zweier  $L^2$ -integrierbaren Funktionen (0-Formen) nicht notwendigerweise wieder  $L^2$ -integrierbar ist, bildet für die  $L^2$ -de Rham Kohomologie das  $\wedge$ -Produkt kein Produkt nach  $\Omega_2$ .

#### Satz 11.1

Seien  $\omega \in \Omega_2^p(\tilde{M})$  und  $\eta \in \Omega_2^q(\tilde{M})$  dann gilt:

$$\omega \wedge \eta \in \Omega_1^{p+q}(\tilde{M}).$$

**Beweis:** Da  $\tilde{M}$  cokompakt, reicht es sich  $\omega \wedge \eta$  in einer Karte  $U$  in lokalen Koordinaten anzuschauen. In lokalen Koordinaten seien  $\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  und

$\eta = \sum_{|J|=q} g_J dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_U |(\omega \wedge \eta)(x)| dvol &= \int_U \left| \sum_{I,J} f_I(x) \cdot g_J(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \right| dvol \\ &\leq \int_U \underbrace{\sum_{I,J} |f_I(x) \cdot g_J(x)|}_{\text{endlich}} = \sum_{I,J} \int_U |f_I(x) \cdot g_J(x)| dvol \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{I,J} \underbrace{\sqrt{\int_U |f_I(x)|^2 dx}}_{\leq \infty} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_U |g_J(x)|^2 dx}}_{\leq \infty} \leq \infty \end{aligned}$$

◇

Für die  $l^2$ -Koketten hat man das umgekehrte Problem: Das  $\cup$ -Produkt zweier  $l^2$ -Koketten liegt zwar sicher wieder in  $C_2^*(\tilde{T})$ , aber ist es auch  $l^1$ -summierbar?

**Satz 11.2**

Seien  $a \in C_2^p(\tilde{T})$  und  $b \in C_2^q(\tilde{T})$ . Dann gilt:

$$a \cup b \in C_1^{p+q}(\tilde{T}) \subset C_2^{p+q}(\tilde{T})$$

für das Misch-Produkt  $\cup_m$ .

**Beweis:** Jeder Simplex der Triangulierung ist Seiten-Simplex von nur endlich vielen Simplices. Da  $\tilde{T}$   $G$ -invariant und  $\tilde{M}$  cokompakt, also  $M$  kompakt ist, ist das Maximum der Anzahl der Simplices, die einen Simplex gemeinsam haben, endlich. Setze  $k$  als dieses Maximum.

Sei  $a \in C_2^p(\tilde{T})$  mit  $\sum_{\sigma \in S_p(\tilde{T})} |a_\sigma|^2 = \alpha$  und sei  $b \in C_2^q(\tilde{T})$  mit  $\sum_{\sigma \in S_q(\tilde{T})} |b_\sigma|^2 = \beta$ .

$$\begin{aligned} \|a \cup_m b\|_{l^1} &= \sum_{\tau \in S_{p+q}(T)} \left| \underbrace{\frac{p!q!}{p+q+1}}_{:=Q} \sum_{|I|=p} a_{\mathcal{U}_I(\tau)} \cdot b_{\mathcal{U}_J(\tau)} \cdot \text{sign}(I, J) \right| \\ &\leq Q \cdot \sum_{\tau \in S_{p+q}(T)} \sum_{|I|=p} |a_{\mathcal{U}_I(\tau)} \cdot b_{\mathcal{U}_J(\tau)}| \\ &\leq Q \cdot \sum_{\tau \in S_{p+q}(T)} \sum_{|I|=p} |a_{\mathcal{U}_I(\tau)}| \cdot \sum_{|J|=q} |b_{\mathcal{U}_J(\tau)}| \\ &\leq Q \cdot \sqrt{\sum_{\tau \in S_{p+q}(T)} \sum_{|I|=p} |a_{\mathcal{U}_I(\tau)}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\tau \in S_{p+q}(T)} \sum_{|J|=q} |b_{\mathcal{U}_J(\tau)}|^2} \\ &\leq Q \cdot \sqrt{k \cdot a} \cdot \sqrt{k \cdot b} \leq \infty \end{aligned}$$

◇

### 11.3 Rechnung fur den Spezialfall $p + q = n$

Sei  $n := \dim(\tilde{M})$ . Das Integral einer  $n$ -Form uber  $\tilde{M}$  ist, genauso wie die Summe einer simplizialen Kokette uber alle  $n$ -dimensionalen Simplices, eine reelle Zahl.

#### Satz 11.3

Seien  $a \in C_2^p(\tilde{M})$ , und  $b \in C_2^q(\tilde{M})$  mit  $p + q = n$ . Dann gilt:

$$\int_{\tilde{M}} I(E(a) \wedge E(b)) \, d\text{vol} = \sum_{\sigma \in S_n(\tilde{M})} (a \cup b)_\sigma$$

**Beweis:** analog wie fur den klassischen Fall:

$$\begin{aligned} (E(a) \wedge E(b)) &= \left( p! \sum_{|\sigma|=p} \omega_\sigma a_\sigma \right) \wedge \left( q! \sum_{|\rho|=q} \omega_\rho b_\rho \right) \\ &\text{Nur wenn } \sigma \text{ und } \rho \text{ Seiten-Simplices von einem Simplex sind,} \\ &\text{in dessen Inneren der Punkt liegt, verschwinden weder } \omega_\sigma \text{ noch } \omega_\rho. \\ &= p!q! \left( \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \sigma, \rho \text{ Seiten-Simplices}}} \underbrace{\omega_\sigma \wedge \omega_\rho}_{\text{oft kommt } d\epsilon \text{ zweimal vor}} a_\sigma \cdot b_\rho \right) \\ \text{Lemma } \omega_\sigma \wedge \omega_\rho \text{ 8.3} &= p!q! \left( \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s = \rho_r}} a_\sigma \cdot b_\rho \cdot (-1)^{r+s} \epsilon_{\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, p} \wedge d\epsilon_{\rho_0, \dots, \hat{\rho}_r, \dots, q} \right) \end{aligned}$$

Da  $a, b \in C_2(\tilde{T})$ , gilt auch:

$$\sum a_\sigma \cdot b_\rho \cdot (-1)^{r+s} \epsilon_{\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_s, \dots, p} \wedge d\epsilon_{\rho_0, \dots, \hat{\rho}_r, \dots, q} \in \Omega_2(\tilde{M}).$$

Nun betrachte:  $I((E(a) \wedge E(b))) =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\tau} \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \epsilon_{\sigma_s} d\epsilon_{\sigma_0, \dots, \hat{s}, \dots, p} \wedge d\epsilon_{\rho_0, \dots, \hat{r}, \dots, q} \cdot (-1)^{r+s} \right) \\
 \text{sign}(\sigma, \rho) &= \int_{\tau} \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \epsilon_{\tau_s} d\epsilon_{\tau_{(s+r+1, \dots, n, 0, s+r-1)}} \right) \\
 &= \left( p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \int_{\tau} \epsilon_{\tau_s} d\epsilon_{\tau_{(s+r+1, \dots, n, 0, s+r-1)}} \right) \\
 \text{Korollar 5.3} &= p!q! \sum_{\substack{|\sigma|=p, |\rho|=q \\ \text{Seiten-Simplices mit } \sigma_s=\rho_r}} a_{\sigma} \cdot b_{\rho} \cdot \text{sign}(\sigma, \rho) \cdot \frac{1}{p+q+1!} \\
 &= (a \cup b).
 \end{aligned}$$

◇

Der Isomorphismus zwischen der reduzierten  $L^2$  de Rham- und der reduzierten simplizialen  $l^2$ -Kohomologie wird durch Inklusion und Integrieren gewonnen. Im Spezialfall  $p + q = n$  ist das Integral mit den Produkten verträglich, das motiviert zu weiteren Untersuchungen.

## Literatur

- [1] Atiyah, M.F.: Elliptic Operators, Discrete Groups and von Neumann Algebra. Astérisque, Vol. 32-33, (1976) pp.43-72
- [2] Bredon, Glen E.: Topology and Geometry, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (1993)
- [3] tom Dieck, Tammo: Topologie (2., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage). Berlin - New York, de Gruyter 2000
- [4] Dodziuk, Jozef: De Rham-Hodge Theory for  $L^2$ -Cohomology of Infinite Coverings. Topology, Vol. 16, Nr.2 (1977) pp.157-165
- [5] Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (1972)
- [6] Dupont, Johan L.: Curvature and Characteristic Classes. Lecture Notes in Mathematics 640. Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (1978)
- [7] Gol'dstein, V. M., Kuz'minov, V. I., and Shvedov, I. A.: De Rham Isomorphism of the  $L_p$ -Cohomology Of Noncompact Riemannian Manifolds. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 19, No. 2 (1988) pp.34-44
- [8] Jänich, Klaus: Vektoranalysis (3. Auflage). Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag 2001
- [9] Jänich, Klaus: Topologie (3. Auflage). Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag 1990
- [10] Lefschetz, S.: Introduction to Topology, Princeton University Press (1949)
- [11] Lück, Wolfgang  $L^2$ -Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (2002)
- [12] Munkres: Elementary Differential Topology, Princeton University Press (1966)
- [13] Pansu, P.: Riemannian Geometry, American Mathematical Society (1996)
- [14] Rado, T. and Reichelderfer: Continuous Transformations in Analysis. Berlin Göttingen Heidelberg, Springer-Verlag (1955)
- [15] De Rham, G. Varieties differentiables, Hermann. Paris (1960)
- [16] Rinow, W.: Lehrbuch der Topologie. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaft (1975)

- [17] Ranicki, Andrew and Sullivan, Dennis: A Semi-Local Combinatorial Formlar for the Signature of a  $4k$ -Manifold. *J.Differential Geometrie* 11 (1976) pp. 23-29
- [18] Whitehead: On  $C^1$ -Complexe, *Ann. of Math* No. 41 (1940) pp. 809-824
- [19] Whitney, H.: *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press (1957)